

بسمه تعالی

گروه‌های بازتابی

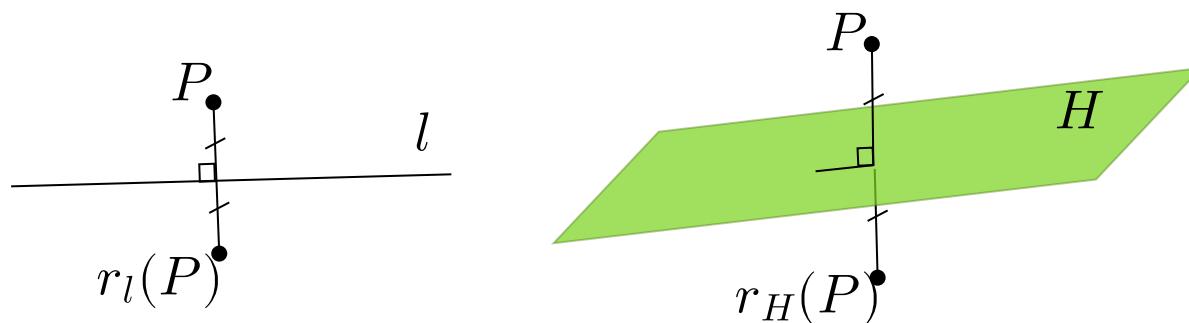
Reflection Groups

مصطفی عین‌اله زاده

19 آذر 1399

1- تعریف گروه‌های بازتابی

بازتاب:



فضاهای هندسی X :

• فضای اقلیدسی n -بعدی: $\mathbb{E}^n$

• کره n -بعدی: $\mathbb{S}^n$

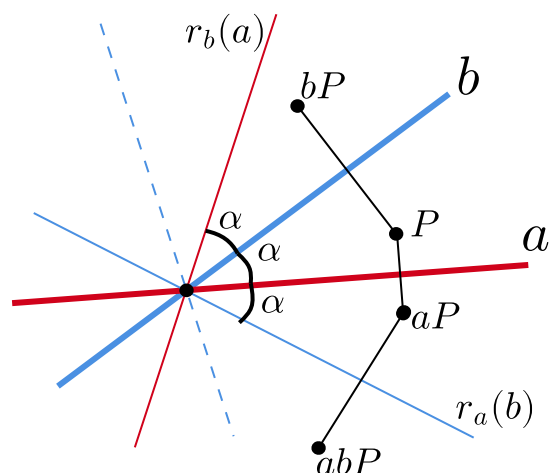
$$\mathbb{S}^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{E}^{n+1}$$

• فضای هذلولوی n -بعدی: $\mathbb{H}^n$

گروه بازتابی: یک زیرگروه گسسته از ایزومتری‌های فضای هندسی X ، که توسط تعدادی بازتاب تولید شده باشد.

2- گروه‌های بازتابی در صفحه اقلیدسی

گروه تولیدشده توسط دو بازتاب:



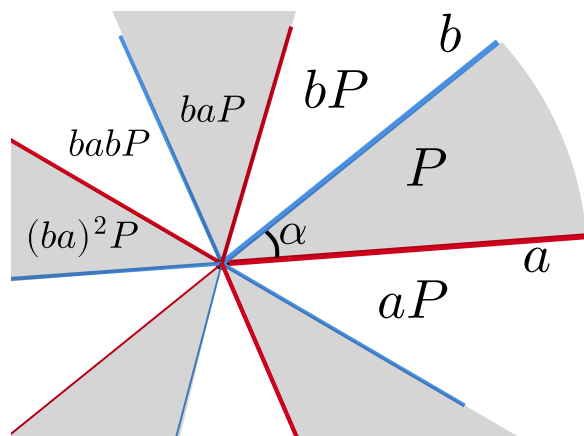
$$G = \langle r_a, r_b \rangle,$$

$$r_a r_b = \rho_{2\alpha} \in G,$$

$$r_a r_b r_a = r_{r_a(b)} \in G.$$

$$G \text{ گسسته است} \iff \alpha = \frac{m}{n}\pi, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

ناحیه اساسی عمل G روی صفحه:



$$\mathbb{E}^2 = \bigsqcup_{g \in G} gP,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n}, \quad (n \geq 2 \text{ یا } n = \infty)$$

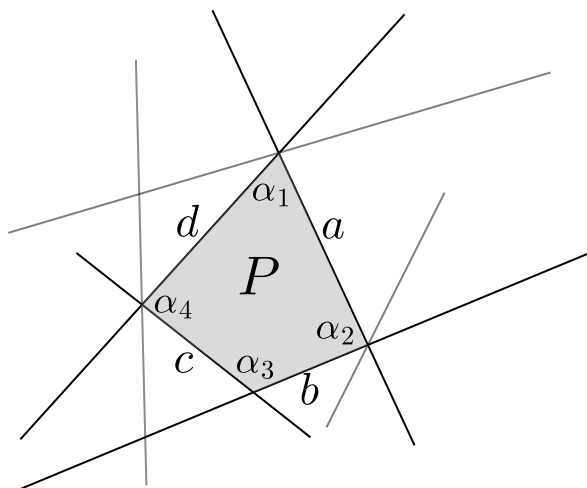
$$(ab)^n = 1,$$

$$G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle \cong D_{2n}$$

$$ab = ba \iff n = 2.$$

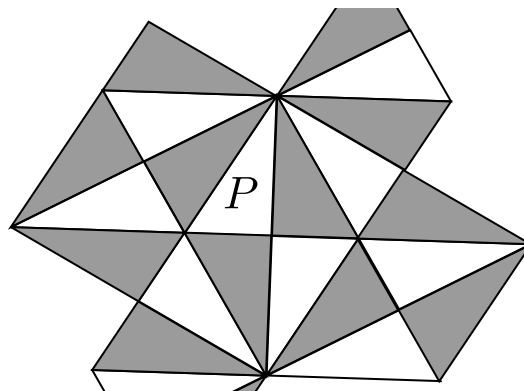
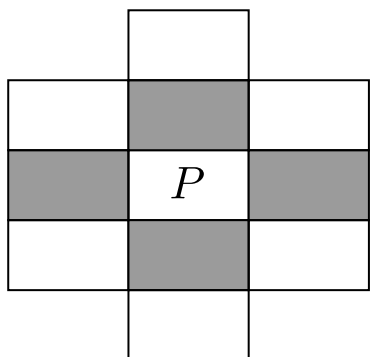
$$n = 2: abab = 1 \implies ab = (ab)^{-1} = ba.$$

حالت کلی:

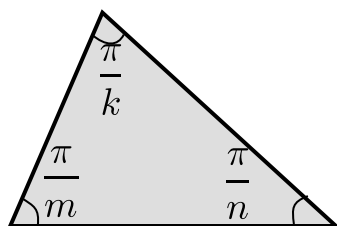


قضیه 1: خطوط بازتاب هر گروه بازتابی G ، صفحه را به چندضلعی‌های محدب تقسیم می‌کند که هر کدام (مثل P) یک ناحیه اساسی برای عمل G هستند. بازتاب‌های نسبت به اضلاع P ، یک مولد مینیمال برای G هستند و اضلاع مجاور P با یکدیگر زوایای $\frac{\pi}{n}$ می‌سازند. هر چندضلعی محدب با این خواص، ناحیه اساسی یک گروه بازتابی در صفحه است. ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \infty$)

3- همه گروه‌های بازتابی صفحه



حالت های با ناحیه اساسی مثلث:



$$\begin{aligned}\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{k} &= \pi \\ \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} &= 1 \\ \Rightarrow (m, n, k) &= (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).\end{aligned}$$

گروه بازتابی تحویل‌ناپذیر: اضلاع P را نمی‌توان به دو دسته تقسیم کرد که خطوط هر دسته بر خطوط دسته دیگر عمود باشد.

4- فضاهای دیگر

تعمیم قضیه 1 در همه فضاهای دیگر هندسی و همه ابعاد درست است!

قضیه 2: ابرصفحه‌های بازتاب هر گروه بازتابی G روی فضای X ، فضا را به چندوجهی‌های محدب تقسیم می‌کند که هر کدام (مثل P) یک ناحیه اساسی برای عمل G روی X هستند. بازتاب‌های نسبت به وجوه P ، یک مولد مینیمال برای G هستند و وجوه مجاور P با یکدیگر زوایای $\frac{\pi}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \infty$) می‌سازند. هر چندوجهی محدب با این خواص، ناحیه اساسی یک گروه بازتابی در X است.

5- دیاگرام کاکستر-دینکین و نمایش گروه‌های بازتابی

نمایش گروه‌های بازتابی:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ وجوه چندوجهی اساسی گروه بازتابی G و زاویه بین a_i و a_j ($i \neq j$) برابر $\frac{\pi}{m_{ij}}$ است و قرار می‌دهیم

$$m_{ii} = 1$$

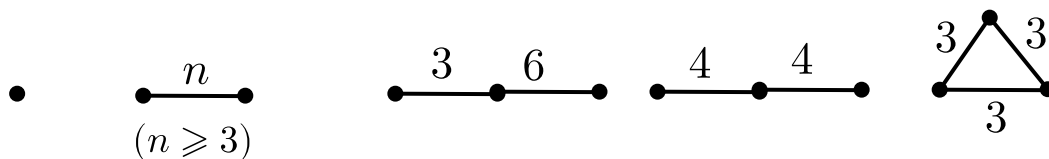
$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid \forall i, j: (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

دیاگرام کاکستر-دینکین:

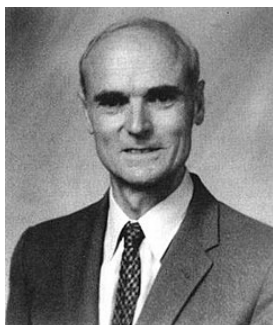
گرافی با رئوس $1, 2, \dots, n$:

- اگر $m_{ij} = 2$ ، i و j به هم وصل نمی‌شوند.
- اگر $m_{ij} \geq 3$ ، i و j با یک یال با برجسب m_{ij} به هم وصل می‌شوند. (معمولاً در حالت $m_{ij} = 3$ ، برجسب نمایش داده نمی‌شود.)

همه گروه‌های بازتابی تحویل‌ناپذیر در صفحه:



6- گروه‌های کاکستر



H.S.M. Coxeter (1907-2003)

گروه کاکستر:

به ازای هر ماتریس متقارن $(m_{ij})_{n \times n}$ با دو خاصیت زیر:

- به ازای هر i ، $m_{ii} = 1$
- به ازای هر $i \neq j$ ، $m_{ij} \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \infty$

گروه زیر را یک گروه کاکستر می‌گویند:

$$G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid \forall i, j: (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle.$$

زیرگروه تناوبی یک گروه کاکستر:

$$G^+ = \langle x_{ij} \mid \begin{array}{l} i \neq j: x_{ij} = a_i a_j, \\ x_{ij} x_{jk} = x_{ik}, \quad x_{ij}^{m_{ij}} = 1 \end{array} \rangle \leq G.$$

مثال:

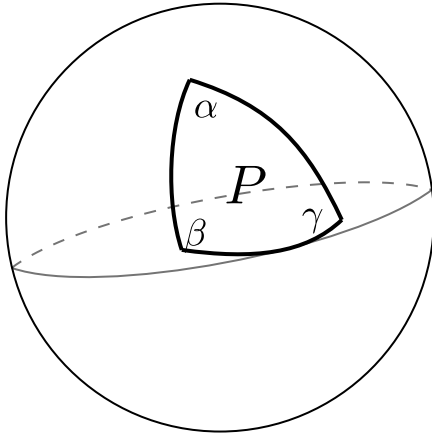
$$S_n = \langle (1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n) \rangle,$$

$$a_i = (i \ i+1), \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 3 & |i-j| = 1 \\ 2 & |i-j| > 1 \end{cases},$$

$$S_n^+ = A_n.$$

7- گروه های بازتابی S^n (بیضوی)

حالت $n = 2$:



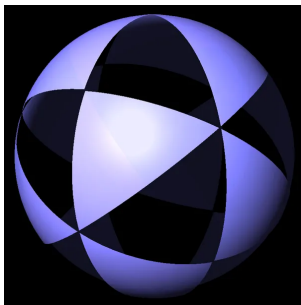
$$A(P) = \alpha + \beta + \gamma - \pi > 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad \beta = \frac{\pi}{n}, \quad \gamma = \frac{\pi}{k}$$

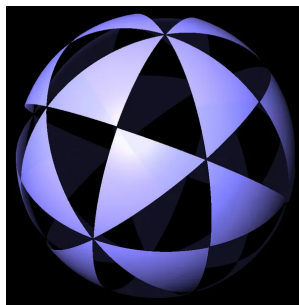
$$\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} > 1.$$

$$(m, n, k) = (2, 2, n), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$$

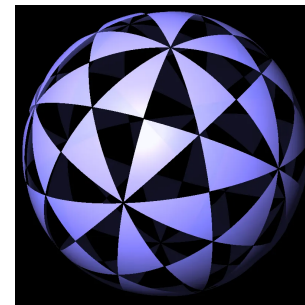
اشکال:



$$\overline{3 \quad 3}$$

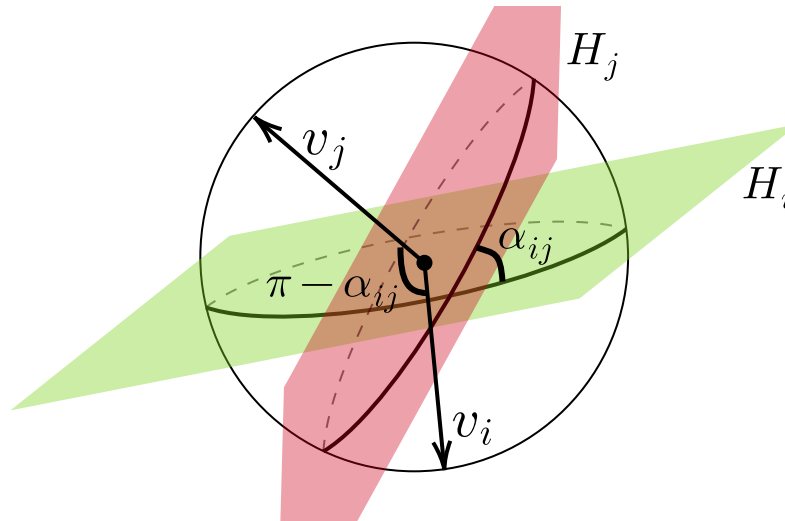


$$\overline{3 \quad 4}$$



$$\overline{3 \quad 5}$$

بعد دلخواه:



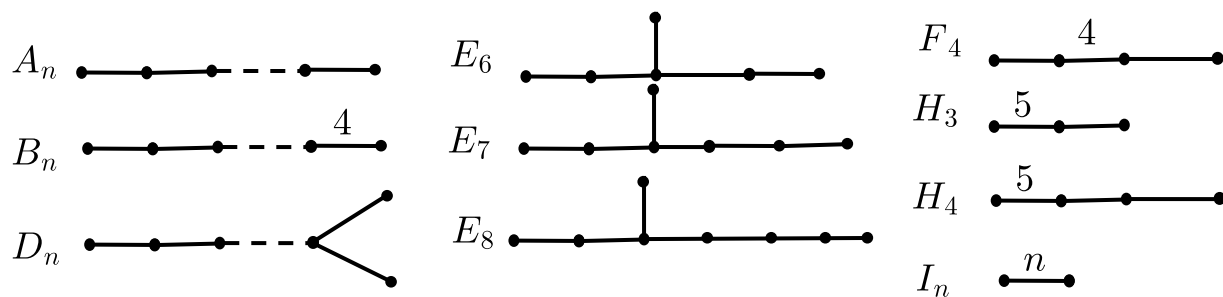
$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & i \neq j \end{cases}.$$

ماتریس شلافلی:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) & i \neq j \end{cases}.$$

قضیه: یک گروه بازتابی کروی با توان‌های (m_{ij}) وجود دارد، اگر و تنها اگر A مثبت معین باشد.

همه گروه‌های بازتابی تحویل‌ناپذیر کروی:



گروه‌های کاکستر در حالت کلی:

قضیه (کاکستر): گروه‌های بازتابی، گروه کاکستر هستند و هر گروه کاکستر متناهی، گروه بازتابی بیضوی است.

8- گروه‌های بازتابی هذلولوی

صفحه هذلولوی $\mathbb{H}^2$:

فضای هندسی حاصل از یک متر خاص روی $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

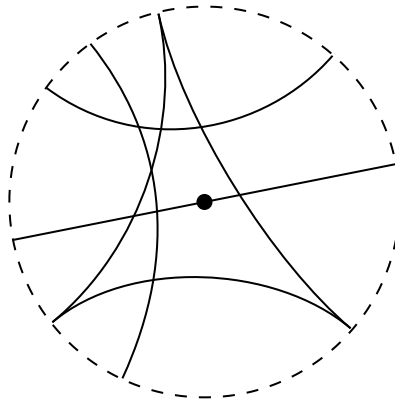
- فضای همگن و همسان‌گرد
- بین هر دو نقطه یک ژئودزیک یکتا وجود دارد که امتداد آنها از دو طرف خطوط این هندسه هستند.
- همه اصول هندسه اقلیدسی غیر از اصل توازی برقرار است.
- جمع زوایای مثلث‌ها از π کمتر است.

$$A(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

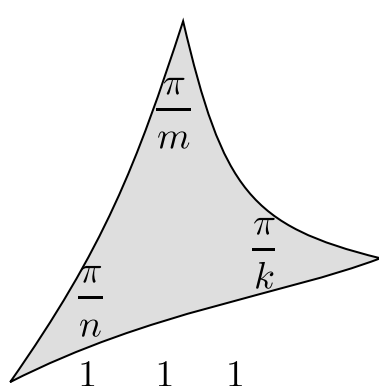
- برای هر دنباله از زوایای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ کمتر از π ، یک چندضلعی محدب با این زوایا وجود دارد اگر و فقط اگر

$$\sum_i (\pi - \alpha_i) > 2\pi.$$

مدل دیسک پوانکاره:

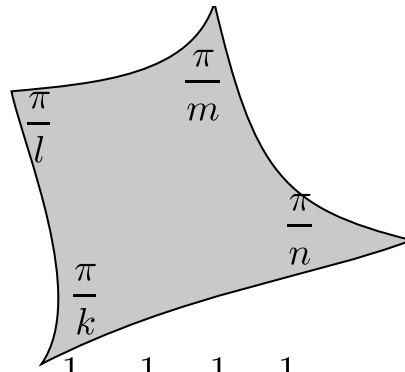


گروه‌های بازتابی در صفحه هذلولوی:



$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < 1$$

$$(m, n, k \geq 2)$$

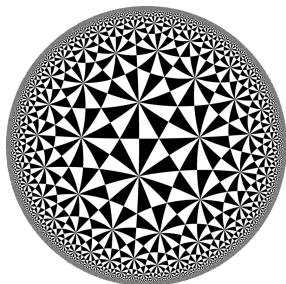


$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} < 2$$

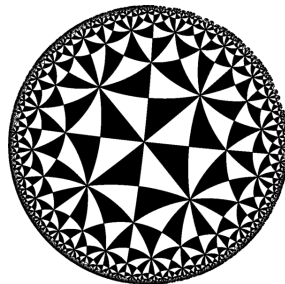
$$(m, n, k, l \geq 2)$$

...

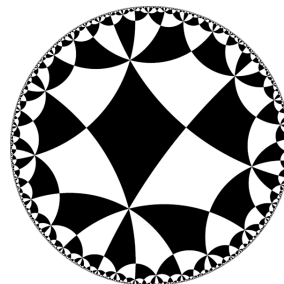
چند شکل:



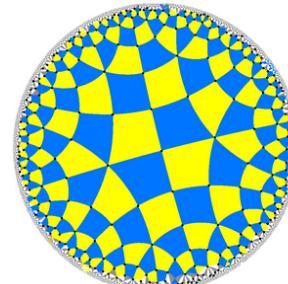
2, 3, 7



2, 4, 6



2, 4, 2, 4



2, 2, 2, 3

ردمبندی کامل گروه‌های هذلولوی در ابعاد بالا هنوز باز است!

9- اولین مثال از "نظریه هندسی گروه‌ها"

درجه حالاتی گروه H متناهی است؟

$$H = \langle x, y \mid x^m = y^n = (xy)^k = 1 \rangle, \quad (m, n, k \geq 2).$$

$$G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^m = (bc)^n = (ca)^k = 1 \rangle,$$

$$x = ab, \quad y = bc \implies H \cong G^+.$$

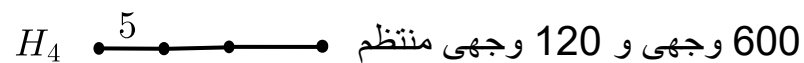
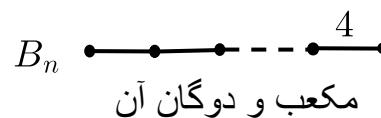
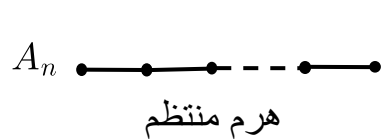
$$G : \begin{cases} \text{بیضوی} & \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} > 1 \\ \text{آفین} & \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} = 1 \\ \text{هذلولوی} & \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < 1 \end{cases}.$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} > 1 \implies G, H \text{ متناهی هستند},$$

$$|G| = 2|H| = \frac{4\pi}{\text{Area}(P)} = \frac{4\pi}{\pi\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - 1\right)} = \frac{4}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} - 1\right)}.$$

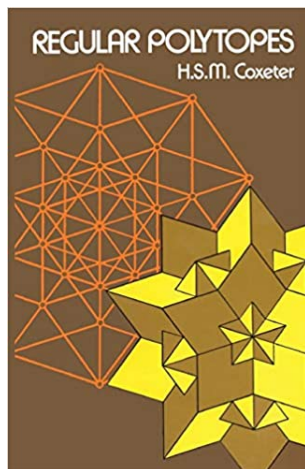
10- چندوجهی‌های منتظم در ابعاد بالا

چندوجهی‌های منتظم (در حد دوگان بودن) $\leftrightarrow$ گروه‌های بازتابی بیضوی با دیاگرام خطی

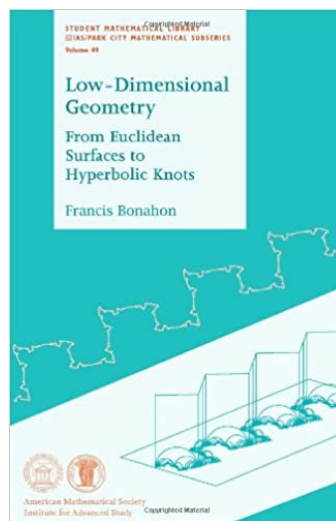


11- مطالب بیشتر از گروه‌های بازتابی

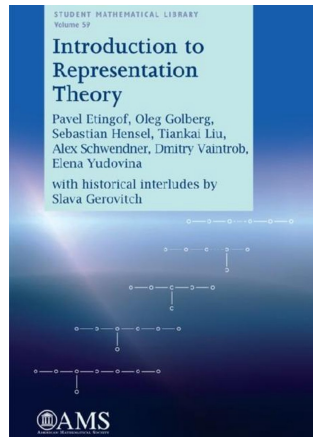
1- چندوجهی‌های منتظم و شبه منتظم



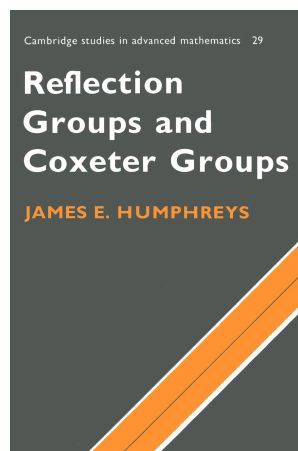
2- هندسه هذلولوی و گروه‌های بازتابی هذلولوی

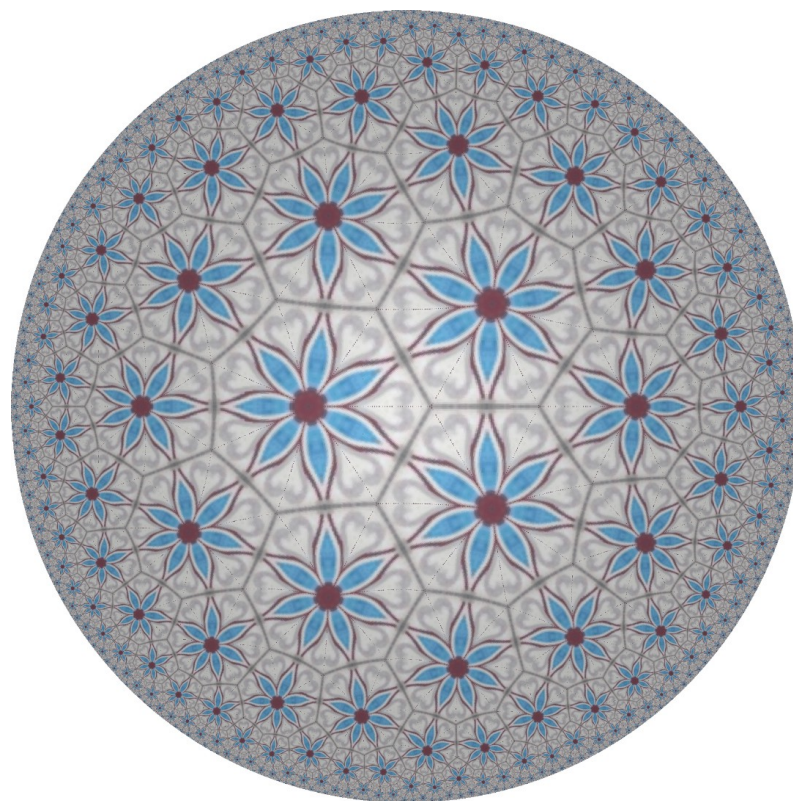


3- کوپورها (Quiver) و نمایش‌های آنها



4- سیستم‌های ریشه‌ها و رده‌بندی جبرهای لی





با تشکر از توجه شما!