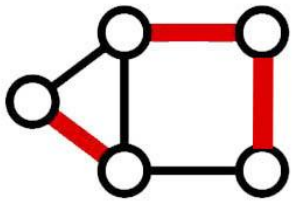
لم جدا کننده (مقاله Matching is as easy as Matrix inversion)

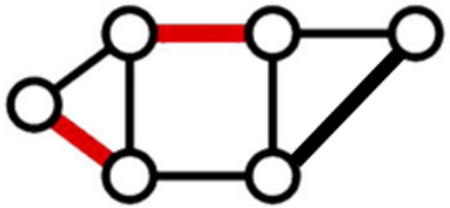
سلسله جلسات پیوست

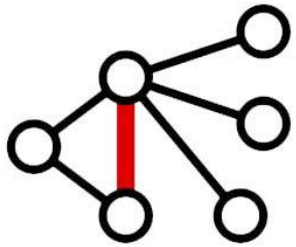
ساجد کریمی

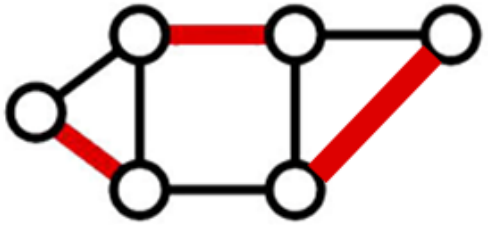
لم جداکننده

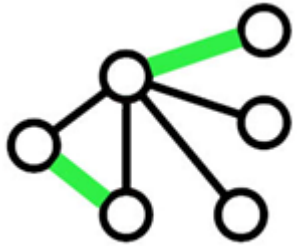
- گراف
- تطابق
- بیشینه تطابق
- تطابق کامل
- گراف دو بخشی





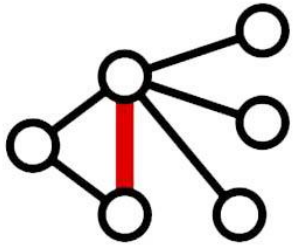


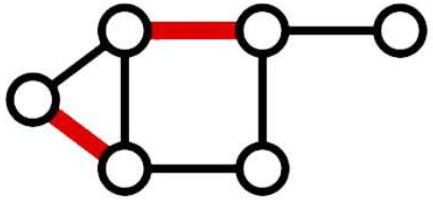


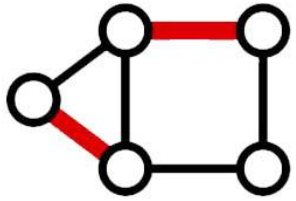


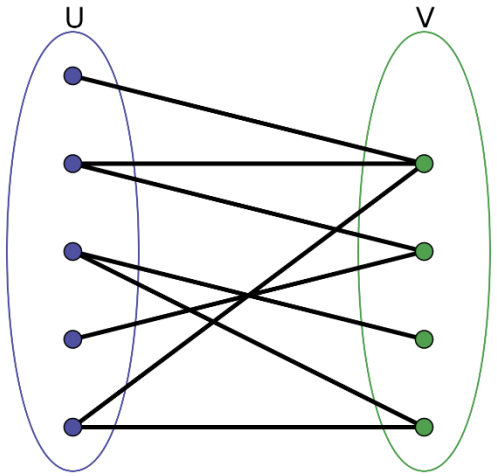
لم جداکننده

- گراف
- تطابق
- بیشینه تطابق
- تطابق کامل
- گراف دو بخشی









بیشینه تطابق

- Tutte (1947): وجود تطابق کامل معادل با وارون‌پذیری ماتریس Tutte در گراف مورد نظر
- Lovasz: الگوریتمی برای بررسی وجود تطابق کامل (RNC^2)
- Rabin & Vazirani: الگوریتمی برای یافتن تطابق کامل با محاسبه وارون تعدادی ماتریس از مرتبه تعداد راس‌ها

- Karp, Upfal & Wigderson: الگوریتمی برای یافتن تطابق کامل (RNC^3)

- نهایتا الگوریتمی که ارائه خواهیم داد، تطابق کامل را در زمانی سریعتر خواهد یافت (RNC^2)

لم جداکننده

- مجموعه E
- تابع وزن $w : E \to \mathbb{Z}$
- خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های E :
- w برای $\mathcal{B}$ جداکننده است اگر $\arg\min_{S\in\mathcal{B}} w(S)$ یکتا باشد.

$$S \subseteq E: \qquad w(S) := \sum_{e\in S} w(e).$$

$$\mathcal{B} \subseteq 2^E$$

- لم: فرض کنید $|E| = m$ و تابع وزن $w : E \to [2m]$ به هر عنصر مقداری تصادفی نسبت دهد. به ازای هر $\mathcal{B}$، با احتمال حداقل $\frac{1}{2}$ تابع w برای آن جداکننده خواهد بود.

اثبات لم (عضو سینگولار)

$$E = \{x_1, \cdots, x_m\}$$

یک تابع وزن w را در نظر بگیرید. وزن تمام عنصر به جز x_i را ثابت بگیرید.

- α_i را اینگونه تعریف کنید که:

$$\left.\begin{array}{l} \text{اگر } w_i \geq \alpha_i \text{ آنگاه } x_i \text{ در عضو کمینه‌ای قرار بگیرد.} \\ \text{اگر } w_i < \alpha_i \text{ آنگاه } x_i \text{ در هیچ عضو کمینه‌ای قرار نگیرد.} \end{array}\right\}$$

اثبات لم (عضو سینگولار)

- α_i را اینگونه تعریف کنید که:

$$\left.\begin{array}{l} \text{اگر } \alpha_i \geq w_i \text{ آنگاه } x_i \text{ در عضو کمینه‌ای قرار بگیرد.} \\ \text{اگر } \alpha_i < w_i \text{ آنگاه } x_i \text{ در هیچ عضو کمینه‌ای قرار نگیرد.} \end{array}\right\}$$

عنصر x_i را سینگولار می‌نامیم اگر $\alpha_i = w_i$.

اثبات لم (ادعا و اثبات آن)

- کمینه یکتا است اگر و تنها اگر عضو سینگولاری وجود نداشته باشد!

$$
\begin{aligned}
Pr(\text{There exists a singular element}) &\leq n \times Pr(i\text{th element is singular}) \\
&\leq n \times \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

الگوریتم یافتن تطابق کامل

- گراف دوبخشی:
  - E : مجموعه یال‌ها
  - $\mathcal{B}$: مجموعه تطابق‌های کامل

در نتیجه، طبق لم، با حداقل احتمال $1/2$، تطابق کامل یکتایی، وزن کمینه را دارد.
آن را M بنامید و وزنش را w بگیرید.

الگوریتم یافتن تطابق کامل

۱.ماتریس مجاورت دوبخشی گراف: A $\Leftarrow$

$$b_{ij} := \begin{cases} 2^{w_{ij}} & a_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ $|B| \neq 0$ و بزرگترین توانی از ۲ که آن را بشمارد، 2^w است.

۲. با استفاده از وزن تطابق کامل مورد نظر و ماتریس $adj(B)$ یال‌های تطابق را می‌یابیم.

الگوریتم یافتن تطابق کامل

۱.ماتریس مجاورت دوبخشی گراف: $A \Leftarrow$ $b_{ij} := \begin{cases} 2^{w_{ij}} & a_{ij} = 1 \\ 0 & a_{ij} = 0 \end{cases}$

$\Leftarrow |B| \neq 0$ و بزرگترین توانی از ۲ که آن را بشمارد، 2^w است.

$$val(\sigma) := \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} \Rightarrow |B| = \sum_{\sigma} sign(\sigma) val(\sigma) \begin{cases} val(\sigma_M) = 2^w \\ 0 \text{ یا } 2^{w'} > w \end{cases}$$

الگوریتم یافتن تطابق کامل

۲. با استفاده از وزن تطابق کامل مورد نظر و ماتریس $adj(B)$ یال‌های تطابق را می‌یابیم.

لم می‌گوید یال (i,j) عضوی از M است اگر و تنها اگر مقدار $\frac{|B_{ij}|2^{w_{ij}}}{2^w}$ فرد باشد. زیرا طبق رابطه زیر

$$|B_{ij}|2^{w_{ij}} = \sum_{\sigma:\sigma(i)=j} sign(\sigma)val(\sigma),$$

الگوریتم یافتن تطابق کامل

I. محاسبه $|B|$ و بدست آوردن w.
II. محاسبه $adj(B)$ که درایه (i,j) از آن، مقدار $|B_{ij}|$ خواهد بود.
III. به صورت موازی روی همه یال‌ها مقدار $\frac{|B_{ij}|2^{w_{ij}}}{2^w}$ را حساب کرده و یال‌های تطابق را پیدا کن.

الگوریتم تصادفی و موازی Pan برای محاسبه $|B|$ و $adj(B)$:

I. تعداد پردازنده مورد نیاز: $O(n^{3.5}m)$
II. زمان مورد نیاز: $O(\log^2 n)$

الگوریتم یافتن تطابق کامل

I. محاسبه $|B|$ و بدست آوردن w.
II. محاسبه $adj(B)$ که درایه (i,j) از آن، مقدار $|B_{ij}|$ خواهد بود.
III. به صورت موازی روی همه یال‌ها مقدار $\frac{|B_{ij}|2^{w_{ij}}}{2^w}$ را حساب کرده و یال‌های تطابق را پیدا کن.

الگوریتم تصادفی و موازی Pan برای محاسبه $|B|$ و $adj(B)$:

I. تعداد پردازنده مورد نیاز: $O(n^{3.5}m)$
II. زمان مورد نیاز: $O(\log^2 n)$

مسائل مرتبط

I. یافتن تطابق کامل با کمترین وزن
ورودی: گراف وزن‌دار (وزن‌ها به شکل یونری داده شده‌اند)
خروجی: تطابق کامل با کمترین وزن

مسائل مرتبط

II. یافتن بیشینه تطابق
ورودی: گراف
خروجی: بیشینه تطابق

پایان و تشکر :)