

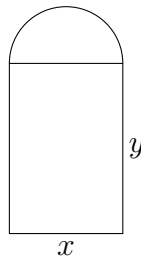


نمونه سؤال سوم

مبحث: توابع متعالی و کاربرد مشتق

پرسش ۱ کره‌ای با شعاع r و هرمی با قاعده‌ی مربع و وجوه جانبی مثلثی شکل در نظر بگیرید، با این ویژگی که قاعده و وجوه هرم بر کره مماس‌اند. ارتفاع هرمی که کمینه حجم را دارد بر حسب r چقدر است؟

پرسش ۲ می‌خواهیم پنجره‌ای به شکل زیر بسازیم. در قسمت مستطیل شکل، از شیشه‌ای استفاده می‌کنیم که در مقایسه با شیشه‌ی به کاررفته در قسمت نیم‌دایره، به اندازه‌ی $1/8$ واحد نور عبور می‌دهد. اگر تنها $l_0 = 4 + 3\pi$ متر پروفیل در ساخت پنجره استفاده شود، ابعاد آن را چطور انتخاب کنیم تا مقدار نور عبورداده‌شده از آن بیشینه باشد؟



پرسش ۳ فرض کنید a یک عدد حقیقی مثبت باشد. نشان دهید معادله‌ی $ae^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

پرسش ۴ ثابت کنید برای هر $x > 0$ ، داریم $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

پرسش ۵ دوزنقه‌ای در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط است، به طوری که قاعده‌ی دوزنقه روی قطر نیم‌دایره قرار دارد. بیشینه مساحت دوزنقه را بیابید.

پرسش ۶ نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی زیر به مبدأ مختصات را بیابید.

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4$$

پرسش ۷

آ) نشان دهید تابع $f(x) = x^x$ روی $[e^{-1}, \infty)$ اکیدا صعودی است.
 ب) اگر g وارون تابع قسمت قبل باشد، ثابت کنید:

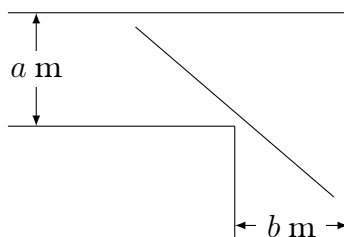
$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y) \ln(\ln y)}{\ln y} = 1$$

پرسش ۸ سه عدد حقیقی مثبت a, b, c داریم. اگر $a + b + c = 16$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 160$ ، بیشینه مقدار abc را بیابید.

پرسش ۹ برای هر عدد صحیح مثبت مانند n ، تابع $p_n(x)$ را تعریف کرده‌ایم. ثابت کنید این تابع اگر n زوج باشد مثبت است و اگر فرد باشد دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

پرسش ۱۰ بیشینه طول تیری را بیابید که بتوان آن را به طور افقی از پیچ یک راهرو به عرض a متر به یک راهرو به عرض b متر حمل کرد. (مطابق شکل، تیر عرض ندارد.)



پرسش ۱۱ اعداد حقیقی مثبت a_1, a_2, \dots, a_n و مجموعه‌ی Δ از نقاطی در \mathbb{R}^n (مانند (x_1, x_2, \dots, x_n)) را داریم به طوری که تمام مختصات هر نقطه، مثبت هستند. اگر برای هر نقطه داشته باشیم $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 1$ ، ثابت کنید تابع $\ln(\prod_{i=1}^n x_i)$ روی Δ دارای یک نقطه ماکزیمم یکتاست و این نقطه را تعیین کنید.