



نمونه سؤال یکم

مبحث: اعداد حقیقی، تابع، حد و پیوستگی

پرسش ۱ حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^3 - 1} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \quad (\text{ب})$$

پرسش ۲ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد که برای هر x گویا، $f(x) = 0$ باشد. نشان دهید f تابع ثابت صفر است.

پرسش ۳ با قبول این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و با استفاده از خواص حد، نشان دهید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$

پرسش ۴ اگر g یک تابع زوج و f تابعی دلخواه باشد، آیا $h = f \circ g$ نیز تابعی زوج است؟

پرسش ۵ آیا عدد a وجود دارد به طوری که حد

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

وجود داشته باشد؟ اگر پاسخ بله است، مقدار a و حاصل حد را بیابید.

پرسش ۶ با استفاده از تعریف رسمی حد، حد توابع زیر را محاسبه و درستی پاسخ را اثبات کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1 \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad (\text{ب})$$

پرسش ۷ دو عدد حقیقی داریم که به ازای هر n طبیعی، اگر نمایش اعشاری این دو عدد را تا n رقم اعشار بنویسیم، اعداد نوشته شده با هم برابرند. ثابت کنید این دو عدد با هم برابرند.

پرسش ۸ فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و $f(0) = f(1)$ باشد.

(آ) ثابت کنید عددی مانند x وجود دارد که $0 \leq x < x + \frac{1}{2} \leq 1$ و

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

راهنمایی: تابع g را به صورت $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$ در نظر بگیرید.

(ب) ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n ، نقطه‌ای مانند x وجود دارد که $0 \leq x < x + \frac{1}{n} \leq 1$ و

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

پرسش ۹ نشان دهید اگر f و g دو تابع پیوسته روی \mathbb{R} باشند، آنگاه تابع m با ضابطه

$$m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

نیز روی \mathbb{R} پیوسته است.

پرسش ۱۰ تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن c یک عدد حقیقی است:

$$f(x) = \begin{cases} c & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$$

ثابت کنید عدد c هر چه باشد، f در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.

پرسش ۱۱ فرض کنید تابع f روی بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد و $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ ثابت کنید:

(آ) نقطه‌ای در بازه‌ی $[a, b]$ مانند A وجود دارد که

$$f(A) = \frac{1}{n}(f(x_1) + \dots + f(x_n))$$

(ب) اگر f نامنفی باشد، نقطه‌ای در بازه‌ی $[a, b]$ مانند G وجود دارد که

$$f(G) = \sqrt[n]{f(x_1) \dots f(x_n)}$$

پرسش ۱۲ فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. ثابت کنید برد تابع f ، برابر با \mathbb{R} است.