



پرسش ۱

(آ) (۳۰ نمره) مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعه می‌توانیم از این مجموعه بنویسیم که هر دوتایی اشتراک داشته باشند؟

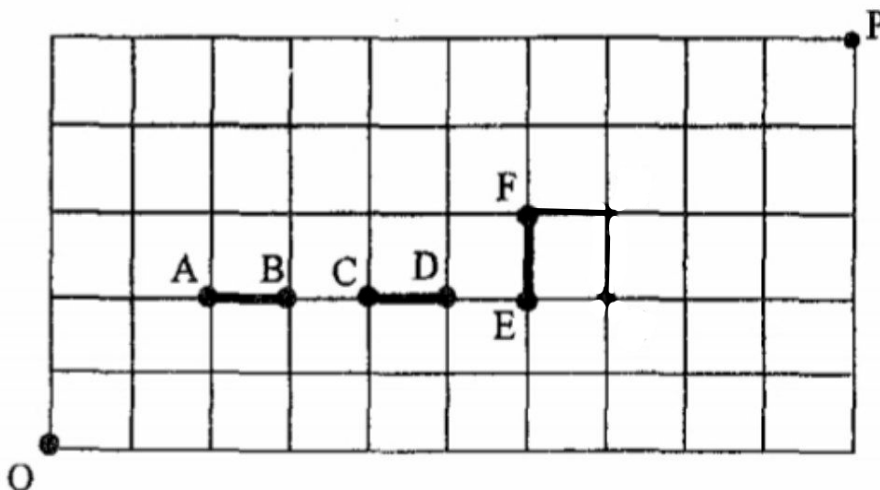
(ب) (۲۰ نمره) ۶۵ توریست به یک شهر که n مکان دیدنی دارد آمده‌اند. هر کدام از آن‌ها از تعدادی از مکان‌های دیدنی بازدید می‌کنند و در انتها می‌دانیم هیچ دو توریستی وجود ندارند به طوری که یکی از آن‌ها به همه‌ی مکان‌هایی که توریست دیگر رفته است رفته باشد. کوچکترین n را بیابید.

پرسش ۲

(۴۰ نمره) نشان دهید برای هر عدد حقیقی x و عدد طبیعی n ، عدد گویای $\frac{p}{q}$ که $1 \leq q \leq n$ است وجود دارد به طوری که $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$.

پرسش ۳

(۴۰ نمره) در شکل زیر یک شبکه‌ی مربعی 5×10 نمایش داده شده است. در این شبکه ۳ پاره‌خط AB, CD, EF مشخص شده‌اند. تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی را که از O به P می‌روند در حالتی که از هیچکدام از این پاره‌خط‌ها عبور نکند به دست آورید.



پرسش ۴

(۳۰ نمره) n یک عدد طبیعی است. تعداد چندجمله‌ای‌های $P(x)$ با ضرایب $\{0, 1, 2, 3\}$ به دست آورید به طوری که $P(2) = n$.

پرسش ۵

(۴۰ نمره) رابطه بازگشتی زیر را حل کنید و تمام جواب‌های آن را به دست آورید.

$$a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3} + n4^n \quad a_0 = -2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 5$$