ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان‌ترم — زمان: ۳ ساعت

بارم هر سوال ۰.۵ نمره است.

پرسش ۱

برای مجموعه‌های متناهی A و B، $J(A,B)$ را تعریف می‌کنیم، $J(A,B) = \dfrac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$ و $J(\emptyset,\emptyset) = 1$. حال تعریف می‌کنیم، $d_J(A,B) = 1 - J(A,B)$.

خواص زیر را ثابت کنید.

آ) $J(A,A) = 1$ و $d_J(A,A) = 0$.

ب) $J(A,B) = J(B,A)$ و $d_J(A,B) = d_J(B,A)$.

پ) $J(A,B) = 1$ و $d_J(A,B) = 0$ اگر و تنها اگر $A = B$.

ت) $0 \leq J(A,B) \leq 1$ و $0 \leq d_J(A,B) \leq 1$.

ث) $d_J(A,C) \leq d_J(A,B) + d_J(B,C)$.

پرسش ۲

در ابتدا یک دسته مهره‌ی n تایی داریم. در هر مرحله می‌توانیم یک دسته مهره انتخاب کنیم و آن را به دلخواه به دو دسته‌ی aمهره‌ای و bمهره‌ای تبدیل کنیم و عدد ab را روی تخته یادداشت کنیم. این کار را تا جایی انجام می‌دهیم که مهره‌ها به n دسته‌ی یک مهره‌ای رسیده باشند. مجموع اعداد روی تخته را حدس بزنید و به کمک استقرا آن را ثابت کنید.

پرسش ۳

در هر خانه از جدول $(2n-1) \times (2n-1)$ یک عدد حقیقی با قدر مطلق کمتر یا مساوی ۱ نوشته شده است به گونه‌ای که جمع اعداد واقع در هر مربع 2×2 برابر صفر است. ثابت کنید جمع کل اعداد جدول کمتر یا مساوی $2n-1$ است.

پرسش ۴

ثابت کنید چندجمله‌ای $9x^9 + 7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + 1$ نمی‌تواند ریشه‌ی صحیح داشته باشد.

راهنمایی: اگر معادله‌ی همنهشتی $f(x) \equiv 0 \ (mod\ a)$ برای یک a جواب نداشته باشد در این صورت معادله‌ی $f(x) = 0$ در اعداد صحیح جواب ندارد.

پرسش ۵

فرض کنید x و y دو عدد طبیعی باشند و

$$3x^2 + x = 4y^2 + y$$

ثابت کنید $x - y$ مربع کامل است.

پرسش ۶

برای هر عدد اول p ثابت کنید دنباله‌ی $1^1, 2^2, 3^3, ..., n^n, ...$ به پیمانه‌ی p متناوب است.
یعنی ثابت کنید عددی مانند m وجود دارد که برای هر k طبیعی داشته باشیم:

$$k^k \equiv (k+m)^{k+m} \pmod{p}$$

موفق باشید.