ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

پاسخنامه تمرین تحویلی: سری چهارم

پرسش ۱

اعداد $۱, ۲, \ldots, n^۲$ را به دلخواه در یک جدول $n \times n$ نوشته‌ایم. ثابت کنید دو خانه‌ی مجاور با اعداد a, b وجود دارند که $|a-b| \geq n+۱$ (دو خانه را مجاور گوییم هرگاه رأس مشترک داشته باشند).

راه حل. طول یک مسیر از a به b را کم‌ترین تعداد دفعاتی تعریف می‌کنیم که برای رسیدن از a به b باید از یک خانه به یک خانه مجاور برویم. این مقدار برای هر دو خانه در جدول حداکثر برابر $n-۱$ است (اگر دو خانه در دو گوشهٔ جدول باشند این مقدار دقیقا برابر $n-۱$ و در صورتی که یکی از آن‌ها یک خانه افقی یا عمودی از گوشهٔ جدول دور شود، این مقدار برابر مانده یا یک واحد کم می‌شود).

اگر دو خانهٔ حاوی اعداد ۱ و $n^۲$ را در نظر بگیریم، از آنجا که با جداکثر $n-۱$ گام می‌توانیم از یکی به دیگری برسیم، پس در این بین، $m < n$ عدد مجاور داریم که اگر آن‌ها را $a_۱, a_۲, \ldots, a_m$ بنامیم ($a_۱ = ۱$ و $a_m = n^۲$)، تفاضل دوتایی آن‌ها به ترتیب اعداد

$$a_۲ - a_۱, \quad a_۳ - a_۲, \quad \ldots, \quad a_m - a_{m-۱}$$

را تشکیل می‌دهند. فرض کنید همهٔ این اعداد قدر مطلقی کم‌تر از $n+۱$ داشته باشند. آنگاه خواهیم داشت:

$$n^۲ - ۱ = \sum_{i=۲}^{m} a_i - a_{i-۱} \leq \sum_{i=۲}^{m} |a_i - a_{i-۱}| < (m-۱)(n+۱) \leq (n-۱)(n+۱) = n^۲ - ۱$$

که به وضوح یک تناقض است. پس فرض ما غلط بوده و یکی از $a_i - a_{i-۱}$ ها قدر مطلقی بزرگ‌تر یا مساوی $n+۱$ دارد.

پرسش ۲

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای $n+1$ عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,\dots,2n\}$ باشد. ثابت کنید اعداد $a,b,c \in A$ وجود دارند که $a+b=c$ (a,b,c لزوما متمایز نیستند).

راه حل. بزرگ‌ترین عدد مجموعهٔ A را M می‌نامیم. دو حالت داریم:

۱. M فرد باشد.

در این حالت تعداد اعداد کم‌تر از M زوج بوده و $\frac{M-1}{2}$ دسته دوتایی تشکیل می‌دهند که مجموع اعدادی برابر M دارند:

$$\{1, M-1\}, \{2, M-2\}, \dots, \{\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}\}$$

از آن‌جا که $\frac{M-1}{2} \leq \frac{2n-1-1}{2} = n-1$ دسته داریم و n عدد دیگر داریم که آن‌ها را از این دسته‌ها انتخاب کرده‌ایم، پس طبق اصل لانه کبوتری دو عدد از یک دسته انتخاب شده و در نتیجه مجموعی برابر M خواهند داشت.

۲. M زوج باشد.

عدد $\frac{M}{2}$ را کنار گذاشته و فرض می‌کنیم این عدد نیز انتخاب شده است. حال اعداد دیگر را مانند حالت قبل به دسته‌هایی دوتایی تقسیم می‌کنیم که مجموع اعدادی برابر M دارند:

$$\{1, M-1\}, \{2, M-2\}, \dots, \{\frac{M}{2}-1, \frac{M}{2}+1\}$$

از آن‌جا که $\frac{M}{2}-1 \leq \frac{2n-2}{2}-1 = n-2$ دسته داریم و $n-1$ عدد دیگر داریم که آن‌ها را از این دسته‌ها انتخاب کرده‌ایم، پس طبق اصل لانه کبوتری دو عدد از یک دسته انتخاب شده و در نتیجه مجموعی برابر M خواهند داشت.

پرسش ۳

۱۶ عدد زوج و ۱۶ عدد فرد از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۶۴\}$ انتخاب شده‌اند طوری که مجموع اعداد زوج و مجموع اعداد فرد با هم برابرند. ثابت کنید مجموع دو تا از اعداد انتخاب شده برابر ۶۵ است.

راه حل. اعداد مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۶۴\}$ را به ۳۲ زیرمجموعهٔ دو عضوی افراز می‌کنیم:

$$\{۱, ۶۴\} \cup \{۲, ۶۳\} \cup \cdots \cup \{۳۲, ۳۳\}$$

فرض می‌کنیم از بین اعداد گفته شده جمع هیچ دو عددی برابر ۶۵ نشود. بنابراین، باید از هر یک از این زیرمجموعه‌های دو عضوی حداکثر یک عدد انتخاب شود. از طرفی چون ۳۲ عدد انتخاب کرده‌ایم باید از هر یک از این زیرمجموعه‌های دو عضوی دقیقا یک عدد انتخاب شود. فرض کنید اعداد زوج انتخاب شده $e_۱, e_۲, \ldots, e_{۱۶}$ باشند. این اعداد از ۱۶ زیرمجموعه دو عضوی مختلف انتخاب شده و بنابراین اعداد فرد انتخاب شده نیز از ۱۶ دستهٔ دیگر خواهند بود. پس مجموع اعداد فرد برابر خواهد بود با:

$$۱۶ \times ۶۵ - \sum \text{اعداد زوج انتخاب نشده} \qquad (*)$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \sum \text{اعداد زوج انتخاب نشده} &= \sum \text{کل اعداد زوج} - \sum \text{اعداد زوج انتخاب شده} \\ &= (۲ + ۴ + \cdots + ۶۴) - (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_{۱۶}) \\ &= ۳۲ \times ۳۳ - (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_{۱۶}) \end{aligned}$$

با جایگزینی عبارت آخر در $(*)$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum \text{اعداد فرد انتخاب شده} &= ۱۶ \times ۶۵ - (۳۲ \times ۳۳ - (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_{۱۶})) \\ &= -۱۶ + (e_۱ + e_۲ + \cdots + e_{۱۶}) \end{aligned}$$

اما طبق فرض مسئله می‌دانیم مجموع اعداد فرد انتخاب شده با مجموع اعداد زوج انتخاب شده ($e_۱ + e_۲ + \cdots + e_{۱۶}$) برابر است. این با معادلهٔ بدست آمده در خط آخر در تناقص بوده و فرض اولیهٔ ما که عدم وجود جفت عددی با مجموع ۶۵ بود را رد می‌کند.

پرسش ۴

نقاط فضا را با k رنگ، رنگ کردیم (k عددی طبیعی و دلخواه است). ثابت کنید مکعب مستطیلی وجود دارد که رئوس آن هم‌رنگ باشند.

راه حل. یک خط شامل $k+۱$ نقطه را در نظر بگیرید. طبق اصل لانه کبوتری روی این خط دونقطه و در نتیجه یک پاره‌خط تک‌رنگ (منظور از شی تک‌رنگ در کل حل، شی‌ای است که رئوس آن همگی به یک رنگ می‌باشند) داریم. برای مشخص شدن رئوس این پاره‌خط $k\binom{k+۱}{۲}$ حالت (k حالت برای رنگ پاره‌خط و $\binom{k+۱}{۲}$ حالت برای مشخص شدن رئوس آن) داریم.

حال یک شبکه متشکل از $(k\binom{k+۱}{۲}+۱)\times(k+۱)$ نقطه در نظر بگیرید. همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، در هر سطر یک پاره‌خط تک‌رنگ یافت می‌شود. این پاره‌خط $k\binom{k+۱}{۲}$ حالت برای قرارگیری و رنگ خود داشته و ما $k\binom{k+۱}{۲}+۱$ ستون داریم. پس طبق اصل لانه کبوتری، دو ستون پاره‌خطی مشابه داشته و بنابراین یک مستطیل تک‌رنگ در این مستطیل خواهیم داشت. برای مشخص شدن رئوس این مستطیل، به طریق مشابه پاره‌خط، $k\binom{k+۱}{۲}\binom{k'}{۲}$ حالت خواهیم داشت که در آن $k'=k\binom{k+۱}{۲}+۱$ می‌باشد.

حال یک فضا متشکل از $(k\binom{k+۱}{۲}\binom{k'}{۲}+۱)\times(k\binom{k+۱}{۲}+۱)\times(k+۱)$ نقطه در نظر بگیرید. در هر شبکه متشکل از $(k\binom{k+۱}{۲}+۱)\times(k+۱)$ نقطه، همان‌طور که پیش‌تر اثبات کردیم، یک مستطیل تک‌رنگ یافت می‌شود. این مستطیل $k\binom{k+۱}{۲}\binom{k'}{۲}$ حالت برای قرارگیری و رنگ خود داشته و ما $k\binom{k+۱}{۲}\binom{k'}{۲}+۱$ شبکه داریم. پس طبق اصل لانه کبوتری، دو شبکه یافت می‌شود که مستطیلی مشابه داشته و بنابراین یک معکب مستطیل تک‌رنگ در این فضا خواهیم داشت.

پرسش ۵

آ) ۱۷ عدد طبیعی داده شده است طوری که عوامل اول هر یک جزو اعداد ۲, ۳, ۵, ۷ هستند. ثابت کنید می‌توان دو تا از این اعداد را انتخاب کرد طوری که حاصل ضربشان مربع کامل شود.

ب) ۴۹ عدد طبیعی داده شده است طوری که عوامل اول هر یک جزو اعداد ۲, ۳, ۵, ۷ هستند. ثابت کنید حاصل ضرب ۴ تا از این اعداد توان چهارم عددی طبیعی است.

راه حل.

آ) طبق فرض سوال هر یک از این اعداد را می‌توان به فرم $a_i = ۲^{\alpha_i} \cdot ۳^{\beta_i} \cdot ۵^{\gamma_i} \cdot ۷^{\phi_i}$ نوشت. می‌خواهیم از بین این ۱۷ عدد، دو عدد مانند a_x, a_y بیابیم که برای آنها داشته باشیم:

$$\alpha_x \equiv \alpha_y, \qquad \beta_x \equiv \beta_y, \qquad \gamma_x \equiv \gamma_y, \qquad \phi_x \equiv \phi_y \qquad \pmod{۲}$$

برای هر یک از اعداد $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \phi_i$ در عدد a_i به پیمانهٔ دو، دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب برای هر a_i به تعداد ۱۶ حالت خواهیم داشت. از آن‌جا که ۱۷ عدد داریم، پس طبق اصل لانه کبوتری دو عدد a_x, a_y با خواص گفته شده خواهیم داشت و اثبات به پایان می‌رسد.

ب) طبق بخش قبل، از بین هر ۱۷ عدد از این ۴۹ عدد دو عدد مانند a_x, a_y یافت می‌شوند که ضربشان مربع کامل شود. این دو عدد را انتخاب کرده و ۱۵ عدد دیگر را به لیست اعداد بازمی‌گردانیم. این کار را می‌توانیم ۱۶ بار دیگر تکرار کنیم. در نتیجه ۱۷ جفت عدد با حاصل‌ضرب مربع کامل خواهیم داشت. برای هر یک از این حاصل‌ضرب‌ها مانند $b_{i,j} = a_i a_j = ۲^{\alpha'_i} \cdot ۳^{\beta'_i} \cdot ۵^{\gamma'_i} \cdot ۷^{\phi'_i}$، می‌دانیم توان‌های اعداد اول اعدادی زوج می‌باشند. حال هر یک از این اعداد زوج به پیمانهٔ چهار می‌توانند باقی‌مانده‌ای برابر صفر یا دو داشته باشند. برای هر یک از $b_{i,j}$ ها مانند بخش قبل، ۱۶ حالت برای توان‌های اعداد اول داشته و چون ۱۷ جفت عدد و ۱۷ عدد $b_{i,j}$ داریم، دو عدد مانند $b_{x,y}, b_{z,t}$ یافت می‌شوند که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$\alpha'_x \equiv \alpha'_y, \qquad \beta'_x \equiv \beta'_y, \qquad \gamma'_x \equiv \gamma'_y, \qquad \phi'_x \equiv \phi'_y \qquad \pmod{۴}$$

بنابراین توان‌های اعداد اول در عدد حاصل ضرب این دو عدد، همگی به پیمانهٔ چهار برابر صفر خواهند شد و اثبات به پایان می‌رسد.

پرسش ۶

فرض کنید m, n, k اعدادی طبیعی باشند. مجموع زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}$$

راه حل. پاسخ برابر $\binom{m}{k}$ می‌باشد. می‌خواهیم از بین $m+n$ بازیکن که n نفر آن‌ها سرگروه می‌باشند k نفر انتخاب کنیم طوری که تمام افراد انتخاب شده بازیکن عادی باشند. از طرفی این تعداد برابر $\binom{m}{k}$ می‌باشد. برای محاسبهٔ آن به روشی دیگر، از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. در هر مرحله i نفر از بین کاپیتان‌ها به‌طور جداگانه انتخاب کرده و سپس $k-i$ نفر از مجموع افراد باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم. این مقدار برابر است با

$$N_i = \binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}$$

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر خواهد بود با:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^k N_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+n-i}{k-i}$$

که همان عبارت خواسته شده در صورت سوال است. پس حل مسئله به پایان می‌رسد.

پرسش ۷

تعداد زیرمجموعه‌های ۳۱ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ را بیابید که مجموع اعضایش بر ۷ بخش‌پذیر است.

راه حل. پاسخ برابر $\frac{۱}{۷}\binom{۱۴۰۰}{۳۱}$ می‌باشد. ادعا می‌کنیم تعداد زیرمجموعه‌های ۳۱ عضوی از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ که مجموع اعضایش بر ۷ باقی‌مانده‌ای برابر با k می‌دهد، برای هر $۰ \leq k \leq ۶$ برابر است. در این صورت مجموعهٔ این زیرمجموعه‌ها برای هر k، مجموعهٔ زیرمجموعه‌های ۳۱ عصوی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ را افراز کرده و تعداد اعضای هر یک از آن‌ها برابر $\frac{۱}{۷}\binom{۱۴۰۰}{۳۱}$ خواهند شد.

فرض کنید مجموع اعداد زیرمجموعه V از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ برابر S باشد. اگر هر عضو V را به پیمانهٔ ۱۴۰۰ محاسبه کنیم و با یک جمع کرده، برای S جدید خواهیم داشت:

$$S' \equiv S + ۳۱ \equiv S + ۳ \pmod{۷}$$

با تکرار این عمل خواهیم داشت:

$$S \to S + ۳ \to S + ۶ \to S + ۲ \to S + ۵ \to S + ۱ \to S + ۴ \to S \pmod{۷}$$

پس هر زیرمجموعهٔ V که مجموع اعضای آن یکی از اعداد $۰ \leq k \leq ۶$ به پیمانهٔ ۷ شود را می‌توان به زیرمجموعه‌ای دیگر با مجموع اعضای $۰ \leq k' \leq ۶$ به پیمانهٔ ۷ تبدیل کرد. از آنجا که این عمل یک به یک و برگشت‌پذیر است، پس تناظری یک به یک بین مجموعهٔ زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضای آن‌ها به پیمانهٔ ۷ برابر x می‌شود و مجموعهٔ زیرمجموعه‌هایی که مجموع اعضای آن‌ها به پیمانهٔ ۷ برابر y می‌شود، برای هر $۰ \leq x \neq y \leq ۶$ وجود دارد و طبق آن‌چه گفته شد این هفت مجموعه، مجموعهٔ زیرمجموعه‌های ۳۱ عضوی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ را به هفت بخش مجزا و برابر تقسیم می‌کنند و حل مسئله به پایان می‌رسد.

پرسش ۸

در چند جایگشت از اعداد $۱, ۱, ۲, ۲, \dots, n, n$ هیچ دو عدد مجاوری برابر نیستند؟

راه حل. از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. داریم:

$$N(\text{حالات مطلوب}) = N(\text{کل جایگشت‌ها}) - N(\text{جایگشت‌ها با یک جفت مجاور برابر})$$
$$+ N(\text{جایگشت‌ها با دو جفت مجاور برابر}) - \dots + (-۱)^n N(\text{جایگشت‌ها با n جفت مجاور برابر})$$

تعداد کل جایگشت‌ها بدون محاسبه تکرار $(۲n)!$ است. حال چون هر عدد دو بار در این جایگشت ظاهر می‌شود، برای هر عدد $۱ \leq i \leq n$ باید این عبارت را بر ۲ تقسیم کرد. پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر $\frac{(۲n)!}{۲^n}$ خواهد بود.

حال فرض کنید می‌خواهیم تعداد جایگشت‌ها با k جفت مجاور برابر را بیابیم. ابتدا باید به $\binom{n}{k}$ روش، k عدد از بین این n عدد انتخاب کنیم. سپس هر جفت (i, i) از این k عدد را یک دسته فرض می‌کنیم. پس k دسته دوتایی و $۲n - ۲k$ دسته تکی از اعداد خواهیم داشت که در بین دسته‌های تکی، $n - k$ جفت تکراری یافت می‌شود. پس تعداد جایگشت‌های ساخته شده با آن‌ها $\frac{(۲n-۲k+k)!}{۲^{n-k}}$ خواهد بود و در نتیجه تعداد کل جایگشت‌ها با k جفت مجاور برابر، برابر $\binom{n}{k}\frac{(۲n-k)!}{۲^{n-k}}$ خواهد بود.

بنابراین تعداد کل حالات مطلوب طبق رابطه‌های گفته شده برابر خواهد بود با:

$$\frac{(۲n)!}{۲^n} + \sum_{k=۱}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}\frac{(۲n-k)!}{۲^{n-k}} = \sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\binom{n}{k}\frac{(۲n-k)!}{۲^{n-k}}$$

پرسش ۹

هر ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع را با گذاشتن $n - ۱$ نقطه به n قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم و از هر نقطه روی اضلاع دو خط موازی دو ضلع دیگر مثلث رسم کرده‌ایم. این خطوط مثلث اصلی را به $n^۲$ مثلث متساوی‌الاضلاع کوچک‌تر تقسیم می‌کنند. تعداد متوازی‌الاضلاع‌های موجود در شکل حاصل را بیابید.

راه حل. در شکل حاصل شده

$$۱ + ۲ + \cdots + (n + ۱) = \frac{(n + ۱)(n + ۲)}{۲} = \binom{n + ۲}{۲}$$

رأس داریم. یکی از این رئوس را انتخاب می‌کنیم. هر یک از رئوس دیگر این شکل که روی یک خط با نقطهٔ انتخاب شده نباشند را انتخاب کنیم، دو رأس متوازی‌الاضلاع که روی قطر بزرگ آن می‌باشند مشخص می‌شود. هر متوازی‌الاضلاع دلخواه نیز به طور یکتا با دو رأس روی قطر بزرگش مشخص می‌شود. پس باید تعداد نقاط هم‌خط با نقطهٔ دلخواه انتخاب شده را بیابیم. دقت کنید که این نقاط روی سه خط متقاطع قرار دارند که شش ناحیه را پدید می‌آورند. دو ناحیهٔ بالا سمت چپ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین و ناحیه‌های باقی‌مانده به جز ناحیهٔ پایین سمت چپ (سه ناحیه) یک مثلث متساوی‌الاضلاع پدید می‌آورند. پس تعداد نقاط روی این سه خط با تعداد نقاط روی دو خط متقاطع برابر می‌باشد. می‌دانیم تعداد این نقاط برابر $(n + ۱) + (n + ۱) - ۱ = ۲n + ۱$ است. پس تعداد راه‌ها برای انتخاب نقطهٔ دوم برابر

$$\binom{n + ۲}{۲} - (۲n + ۱) = \binom{n}{۲}$$

خواهد بود و از آنجا که ترتیب این دو نقطه تاثیری در حل مسئله ندارد، پاسخ نهایی برابر

$$\frac{۱}{۲}\binom{n}{۲}\binom{n + ۲}{۲} = \frac{(n - ۱)(n)(n + ۱)(n + ۲)}{۸}$$

بوده و حل به پایان می‌رسد.

با تشکر از سینا قاسمی‌نژاد