ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی: سری چهارم

مهلت تحویل: ۱۷ اردیبهشت

پرسش ۱

اعداد $۱, ۲, \dots, n^۲$ را به دلخواه در یک جدول $n \times n$ نوشته‌ایم. ثابت کنید دو خانه‌ی مجاور با اعداد a, b وجود دارند که $|a - b| \geq n + ۱$. (دو خانه را مجاور گوییم هرگاه راس مشترک داشته باشند)

پرسش ۲

فرض کنید A زیرمجموعه‌ای $n + ۱$ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ باشد. ثابت کنید اعداد a, b, c در A وجود دارند که $a = b + c$ (a, b, c لزوما متمایز نیستند)

پرسش ۳

۱۶ عدد زوج و ۱۶ عدد فرد از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \dots, ۶۴\}$ انتخاب شده‌اند طوری که مجموع اعداد زوج و مجموع اعداد فرد باهم برابرند. ثابت کنید مجموع دوتا از اعداد انتخاب شده برابر ۶۵ است.

پرسش ۴

نقاط فضا را با k رنگ رنگ کردیم (k عددی طبیعی و دلخواه است) ثابت کنید مکعب مستطیلی وجود دارد که راس‌های آن هم‌رنگ باشند.

پرسش ۵

آ) ۱۷ عدد طبیعی داده شده است طوری که عوامل اول هر یک جزو اعداد $۲, ۳, ۵, ۷$ هستند. ثابت کنید می‌توان دوتا از این اعداد را انتخاب کرد طوری که حاصلضربشان مربع کامل شود.

ب) ۴۹ عدد طبیعی داده شده است طوری که عوامل اول هر یک جزو اعداد $۲, ۳, ۵, ۷$ می‌باشد. ثابت کنید حاصلضرب ۴ تا از این اعداد توان چهارم عددی طبیعی است.

پرسش ۶

فرض کنید n, m, k اعدادی طبیعی باشند. مجموع زیر را تا حد امکان ساده کنید:

$$\sum_{i=۰}^{k} (-۱)^i \binom{n}{i} \binom{m+n-i}{k-i}$$

پرسش ۷

تعداد زیرمجموعه‌های ۳۱ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۱۴۰۰\}$ را بیابید که مجموع اعضایش بر ۷ بخش پذیر باشد.

پرسش ۸

در چند جایگشت از اعداد $۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, n, n$ هیچ دو عدد مجاوری برابر نیستند؟

پرسش ۹

هر ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع را با گذاشتن $n - ۱$ نقطه به n قسمت مساوی تقسیم کرده ایم و از هر نقطه روی اضلاع دوخط موازی دوضلع دیگر مثلث رسم کرده ایم.این خطوط مثلث اصلی را به $n^۲$ مثلث متساوی الاضلاع کوچکتر تقسیم می کنند. تعداد متوازی الاضلاع های موجود در شکل حاصل را بیابید.