ریاضیات گسسته

نیم‌سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقبایی

دانشکده علوم ریاضی

تمرین تحویلی: سری دوم

مهلت تحویل: ۱۳ فروردین

پرسش ۱

ثابت کنید از میان هر $۲^{n+۱}$ عدد طبیعی می‌توان ۲^n عدد را طوری انتخاب کرد که مجموعشان بر ۲^n بخش‌پذیر باشد.

پرسش ۲

ثابت کنید به ازای هر عدد n طبیعی جدولی $۲^n \times ۲^n$ وجود دارد که با اعداد ۱ و ۰ پر شده باشد و هر دو سطر دقیقا در $۲^{n-۱}$ خانه اختلاف داشته باشند.

پرسش ۳

n گلوله با وزن‌های مختلف و یک ترازوی دو کفه‌ای داریم. ثابت کنید با $\lceil \frac{۳n}{۲} \rceil - ۲$ بار استفاده از ترازو می‌توانیم سبک‌ترین و سنگین‌ترین گلوله‌ها را پیدا کنیم.

پرسش ۴

آ) آیا می‌توان اعداد ۱ تا n را طوری روی یک خط چید به طوری که میانگین هیچ دو عددی بینشان نیامده باشد؟

ب) نشان دهید بی نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که بتوان اعداد $۱, ۲, \ldots, n^۲$ را در یک جدول $n \times n$ قرار داد طوری که میانگین هیچ دو عددی در کوچک ترین مستطیل شامل این دو عدد قرار نگیرد.

پرسش ۵

فرض کنید اعداد طبیعی $w_۱, w_۲, \ldots, w_n$ وزن n وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها **کامل** می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی W که کوچک‌تر از $w_۱ + w_۲ + \cdots + w_n$ است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر W شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه‌ی کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه‌ی باقی‌مانده نیز کامل است.

پرسش ۶

یک جدول $n \times m$ داریم که هر خانه‌ی آن با یکی از رنگ‌های آبی یا قرمز رنگ شده است. ثابت کنید هرطور که این رنگ‌آمیزی اتفاق بیفتد، یکی از رنگ‌ها هست که بتوانیم با یک وزیر از یکی از خانه‌های آن شروع کنیم و بدون توقف در خانه‌های رنگ مخالف به همه‌ی خانه‌های آن رنگ برویم.

پرسش ۷

دایره‌ای با ۲۰۲۰ نقطه روی آن داریم. نقاط آن به دلخواه با ۲۰ رنگ، رنگ شده است. ما می‌توانیم وترهایی بین این نقاط را به هم وصل کنیم که
۱)دو سر هر وتر هم‌رنگ باشند.
۲)وترها یکدیگر را قطع نکنند.(حتی در نقاط روی دایره)
ثابت کنید می‌توانیم لااقل ۱۰۰ وتر رسم کنیم.

پرسش ۸

فرض کنید $n \geq ۴$ عددی طبیعی باشد. اعداد طبیعی $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ دور یک دایره با همین ترتیب قرار گرفته اند طوری که هر عدد مجموع دو عدد مجاورش را می شمارد. یعنی

$$\frac{x_{i-۱} + x_{i+۱}}{x_i} = k_i$$

برای هر i عددی صحیح است. $x_۰ = x_n, x_{n+۱} = x_۱$ ثابت کنید

$$۲n \leq k_۱ + k_۲ + \cdots + k_n < ۳n.$$

پرسش ۹

آیا جایگشت $a_۱, a_۲, \dots$ از اعداد طبیعی وجود دارد که برای هر n داشته باشیم

$$n | a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

(دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \dots$ یک جایگشت از اعداد طبیعی است اگر هر عدد طبیعی دقیقا یک بار در این دنباله ظاهر شود.)

پرسش ۱۰

فرض کنید a, b, c اعدادی طبیعی باشند که $a \neq c$ و $\frac{a}{c} = \frac{a^۲+b^۲}{c^۲+b^۲}$. ثابت کنید $a^۲ + b^۲ + c^۲$ اول نیست.

پرسش ۱۱

m, n اعداد طبیعی هستند به طوری که $mn | m^۲ + n^۲ + m$. ثابت کنید m مربع کامل است.

پرسش ۱۲

فرض کنید m, n اعدادی طبیعی باشند که $n \geq m$ ثابت کنید

$$\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

عددی صحیح است.