



دانشکده علوم ریاضی

# ریاضیات گسسته

نیم سال دوم ۱۳۹۹-۱۴۰۰

مدرس: خانم عقابایی

زمان: ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه

امتحان پایان ترم

بارم هر سوال ۱ نمره است.

## پرسش ۱

یک جایگشت مانند  $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$  از اعداد ۱ تا  $n$  را خوب می‌نامیم هرگاه برای هر  $1 \leq i \leq n$ ،  $\pi(\pi(i)) = i$ . رابطه‌ای برای تعداد جایگشت‌های خوب اعداد ۱ تا  $n$  بیابید.

## پرسش ۲

آ) با استفاده از بسط نیوتن نامتناهی (سری تیلور)، ضریب  $x^n$  را در  $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$  بیابید.  
ب) با کمک تساوی زیر یک اتحاد ترکیباتی بیابید.

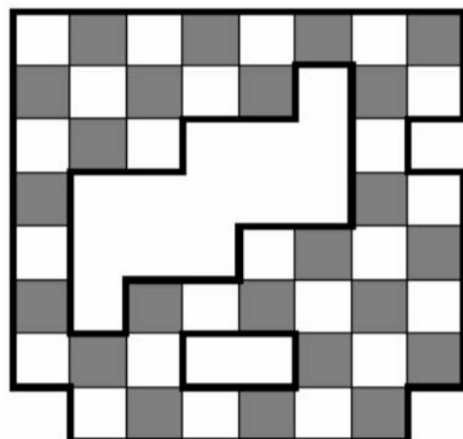
$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \times (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-x}$$

## پرسش ۳

در سوالات زیر شما باید سوال را با مدل‌سازی به گراف حل کنید و راه‌های دیگر پذیرفته نمی‌باشد.

آ) می‌خواهیم بازه‌ی امتحانات همه دروس ارائه‌شده دانشگاه صنعتی شریف را تعیین کنیم به طوری که اگر دو درس دارای حداقل یک دانشجوی مشترک باشند امتحان آن‌ها نمی‌توانند در یک روز برگزار شوند. حداقل تعداد روزهای لازم را به دست آورید. (باید مجموعه رئوس و یال‌های گراف مورد نظر را تعریف کنید و بگویید جواب مسئله معادل چه پارامتری از این گراف است.)

ب) آیا شکل زیر را می‌توان با دومینوها ( $1 \times 2$ ) کاشی‌کاری کرد به طوری که دومینوها روی هم نباشند و همه‌ی خانه‌ها پوشش داده شوند؟



## پرسش ۴

فرض کنید  $G$  گرافی با  $n$  راس و  $m$  یال باشد و  $t(G)$  نشان‌دهنده‌ی تعداد مثلث‌های گراف  $G$  باشد. نابرابری زیر را ثابت کنید.

$$t(G) + t(\overline{G}) \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - m(n-1)$$

راهنمایی: از نابرابری کوشی-شوارتز استفاده کنید.

نابرابری کوشی-شوارتز: اگر  $x_i$  ها و  $y_i$  ها اعداد حقیقی باشند آنگاه نابرابری زیر را برایشان داریم.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

## پرسش ۵

درخت دلخواه  $T$  مفروض است. برای هر دو راس متمایز مانند  $u, v$  از  $T$  که به هم وصل نیستند اگر بین این دو راس مسیری به طول ۲ یا مسیری به طول ۳ وجود داشت آنگاه یال  $uv$  را به  $T$  اضافه می‌کنیم. نشان دهید گراف حاصل همیلتونی می‌باشد.

## پرسش ۶

درخت  $T$  با  $t$  راس و گراف  $G$  با  $n$  راس مفروض هستند. ثابت کنید اگر  $G$  حداقل  $n(t-1)$  یال داشته باشد آنگاه  $G$  دارای زیرگرافی یکریخت با  $T$  است.

موفق باشید.