



## سوال ۱

### بخش اول

می‌دانیم مجموعه‌ی  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  تشکیل یک پایه برای  $\mathbb{R}^3$  می‌دهند. سه زیرمجموعه زیر از  $\mathbb{R}^3$  را در نظر بگیرید:

$$A = \{(1, 1, 0)\} \bullet$$

$$B = \{(0, 2x, 0) | x \in \mathbb{R}\} \bullet$$

$$C = \{(x, 2x, 3x) | x \in \mathbb{R}\} \bullet$$

بررسی کنید که آیا هر کدام از این مجموعه‌ها، زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  هستند یا خیر.

### بخش دوم

فرض کنید  $a_1 = (1, 2, 0)$ ,  $a_2 = (0, 2, 0)$ ,  $a_3 = (1, 2, 3)$ . نشان دهید مجموعه‌ی  $\{a_1, a_2, a_3\}$  یک پایه برای  $\mathbb{R}^3$  است.

### بخش سوم

مجموعه‌های  $A, B, C$  را در پایه‌ی جدید توصیف کنید. آیا این مجموعه‌ها در پایه‌ی جدید، زیرفضا هستند؟

## سوال ۲

از زیرمجموعه‌های زیر، کدام زیرفضای  $\mathbb{R}^\infty$  هستند؟ برای جواب خود اثبات ارائه دهید.

- مجموعه‌ی همه دنباله‌هایی مانند  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  که بی‌نهایت صفر دارند.
- مجموعه‌ی همه دنباله‌هایی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  که از جایی به بعد صفر هستند.
- مجموعه‌ی همه دنباله‌های نزولی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  (به ازای هر  $j$ ,  $x_j \geq x_{j+1}$ ).

- مجموعه‌ی همه دنباله‌های همگرا مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  (دنباله‌ی  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  همگراست اگر وقتی  $i \rightarrow \infty$  حد داشته باشد).
- مجموعه‌ی همه تصاعد‌های حسابی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  (همه‌ی  $x_i - x_{i-1}$  ها برابرند).
- مجموعه‌ی همه تصاعد‌های هندسی مانند  $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$  به ازای همه‌ی  $x_1, k$  ها.

### سوال ۳

فرض کنید  $W_1, W_2$  زیرفضاهایی از  $V$  باشند به طوری که  $W_1 + W_2 = V$  و  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ . ثابت کنید برای هر بردار  $\alpha \in V$  بردار یکتای  $\alpha_1 \in W_1$  و  $\alpha_2 \in W_2$  وجود دارند به طوری که  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

### سوال ۴

#### بخش اول

از بین هر کدام از توابع زیر، کدام یک تبدیل خطی هستند؟

•  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، با ضابطه‌ی  $f(x) = x^c$  که در آن  $c \neq 1$  یک عدد ثابت است.

•  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  با ضابطه‌ی  $g(x) = (|x|, \cos(x))$ .

•  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  با ضابطه‌ی  $h(x, y) = (x - y, x + y, 2x)$ .

#### بخش دوم

یک زیرفضای دلخواه از  $\mathbb{R}^2$  مانند  $A$  مثال بزنید که بیش از یک عضو داشته باشد و از طرفی برابر با  $\mathbb{R}^2$  نباشد. بُعد  $A$  را محاسبه کنید.

#### بخش سوم

تابع  $h$  از قسمت قبل را در نظر بگیرید. تصویر مجموعه‌ی  $A$  تحت این تابع را بیابید. آیا تصویر  $A$  یک زیرفضا از  $\mathbb{R}^3$  است؟ اگر یک زیرفضا است، بُعد آن را در  $\mathbb{R}^3$  بیابید.