



دانشکده‌ی علوم ریاضی

مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

جبر خطی

تمرین سری ششم

پرسش ۱ - (صفحه 103 ، شماره 3)

فرض کنید M یک ماتریس $n \times n$ باشد که با ترانهاده خود یکسان است. اگر X و Y دو بردار ستونی باشند، آنگاه $X^T M Y$ یک ماتریس 1×1 است که آن را با یک عدد نمایش می‌دهیم. نشان دهید نگاشت

$$(X, Y) \mapsto X^T M Y$$

سه خاصیت $SP1, SP2, SP3$ را دارا می‌باشد. مثالی از یک ماتریس 2×2 ارائه دهید که این ضرب معین مثبت نباشد.

پرسش ۲ - (صفحه 111 ، شماره 2(a))

یک پایه یکه متعامد برای زیرفضایی از R^4 که توسط دو بردار زیر تولید می‌شوند را پیدا کنید:

$$(1, 2, 1, 0), (1, 2, 3, 1).$$

پرسش ۳ - (صفحه 112 ، شماره 4)

فرض کنید V زیرفضایی باشد که توسط دو تابع f, g تولید می‌شود به طوری که $f(t) = t$ و $g(t) = t^2$. یک پایه یکه متعامد برای V پیدا کنید.

پرسش ۴ - (صفحه 112 ، شماره 7)

\bar{A} را فضای برداری مربوط به همه ماتریس‌های $n \times n$ روی R در نظر بگیرید و ضرب داخلی دو ماتریس A و B را به صورت

$$\langle A, B \rangle = tr(AB)$$

تعریف کنید. نشان دهید این یک ضرب داخلی بوده و همچنین ناتباهیده^۱ می‌باشد.

(ب) اگر A یک ماتریس حقیقی متقارن باشد، نشان دهید $tr(AA) \geq 0$ و همچنین $tr(AA) > 0$ اگر $A \neq 0$. بدین ترتیب تریس، یک ضرب داخلی معین مثبت روی فضای ماتریس‌های حقیقی تعریف می‌کند.

(پ) اگر V فضای برداری همه ماتریس‌های $n \times n$ متقارن باشد، $dim V$ چند است؟ بعد W که برابر زیرفضایی از این فضا که شامل همه ماتریس‌هایی که برای آنها $tr(A) = 0$ برقرار است، می‌باشد، چند است؟ بعد فضای مکمل متعامد W^\perp را نسبت به ضرب داخلی معین مثبت معرفی شده در قسمت ب را نیز محاسبه کنید.

^۱non-degenerate

پرسش ۵ - (صفحه 112 ، شماره 9)

فرض کنید V یک فضای متناهی بعدی روی R باشد، همراه با یک ضرب داخلی معین مثبت. $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ را مجموعه بردار هایی از V در نظر بگیرید که نرم برابر 1 دارند و دو به دو به یکدیگر عمود می باشند. فرض کنید برای هر $v \in V$ داشته باشیم

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^m \langle v, v_i \rangle^2 .$$

نشان دهید $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ یک پایه برای V می باشد.

پرسش ۶ - (صفحه 112 ، شماره 10)

فرض کنید V یک فضای متناهی بعدی روی R باشد، همراه با یک ضرب داخلی معین مثبت. برای هر $v, w \in V$ ، قاعده متوازی الاضلاع را اثبات کنید:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

پرسش ۷ - (صفحه 117 ، شماره 1(h))

رتبه^۲ ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

پرسش ۸ - (صفحه 117 ، شماره 2)

فرض کنید A و B دو ماتریس باشند به طوری که AB موجود باشد. نشان دهید:

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B).$$

پرسش ۹ - (صفحه 118 ، شماره 3)

فرض کنید A ماتریس مثلثی باشد

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

و همچنین هیچیک از درایه های قطری A برابر 0 نباشند. رتبه A را بدست آورید.

rank^۲