



مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

جبر خطی

تمرین سری پنجم

پرسش ۱ - (صفحه 87 ، شماره 1(a))

ماتریس مربوط به نگاشت خطی زیر را پیدا کنید:

$$F : R^4 \rightarrow R^2, F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

پرسش ۲ - (صفحه 87 ، شماره 10)

فرض کنید F_θ نگاشت دوران مربوط به درجه θ باشد. نشان دهید F_θ وارون پذیر است و ماتریس متناظر F_θ^{-1} را نمایش دهید.

پرسش ۳ - (صفحه 93 ، شماره 1(a))

اگر فضای برداری R^3 مان $M_{B'}^B$ را با توجه به مجموعه های زیر پیدا کنید:

$$B = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$$

$$B' = \{(2, 1, 1), (0, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$$

پرسش ۴ - (صفحه 93 ، شماره 2)

فرض کنید $L : V \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد و $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ یک پایه از V باشد. اگر اعداد c_1, c_2, \dots, c_n موجود باشند به طوری که داشته باشیم $L(v_i) = c_i v_i$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، آنگاه $M_B^B(L)$ را توصیف کنید.

پرسش ۵ - (صفحه 93 ، شماره 5)

فرض کنید $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ یک نقطه در صفحه باشد و همچنین F را معادل با یک دوران با زاویه $\frac{\pi}{4}$ در نظر بگیرید. مولفه های $F(x)$ با توجه به پایه عادی، $\{E^1, E^2\}$ چگونه می باشند؟

پرسش ۶ - (صفحه 93 ، شماره 8(e))

فرض کنید $D = \frac{d}{dt}$ عملگر مشتق باشد. ماتریس متناظر D را با توجه به پایه زیر پیدا کنید:

$$1, t, e^t, e^{2t}, te^{2t}$$

پرسش ۷ - (صفحه 93 ، شماره 9)

(آ) فرض کنید N یک ماتریس مربعی باشد. می‌گوییم N پوچ توان است، اگر یک عدد صحیح مثبت r موجود باشد به طوری که داشته باشیم $N^r = 0$. نشان دهید اگر N پوچ توان باشد، $I - N$ وارون پذیر است.
(ب) معادل حکم قبلی را برای نگاشت های خطی که متناظر یک فضای برداری به خودشان هستند، بیان و اثبات کنید.

پرسش ۸ - (صفحه 93 ، شماره 10)

P_n را فضای برداری متناظر با تمام چندجمله‌ای های با درجه کمتر مساوی n در نظر بگیرید. آنگاه نگاشت مشتق $D : P_n \rightarrow P_n$ یک نگاشت خطی از P_n به خودش خواهد بود. همچنین فرض کنید I نگاشت همانی باشد. نشان دهید نگاشت های خطی زیر وارون پذیر هستند:

• $I - D^2$.

• $D^m - I$ برای هر m مثبت.

• $D^m - cI$ برای هر $c \neq 0$.

پرسش ۹ - (صفحه 93 ، شماره 11)

ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که بالامتثالی است و روی قطر اصلی آن 0، بالای قطر آن 1 و بقیه درایه هایش نیز برابر 0 هستند.
(آ) اثر L_A را بر بردار های پایه ای $\{E^1, E^2, \dots, E^n\}$ درون K^n را توصیف کنید.
(ب) نشان دهید $A^n = O$ و $A^{n-1} \neq O$.