دانشکده‌ی علوم ریاضی

جبرخطی مدرس: دکتر علیرضا رنجبر

تمرین سری سه

پرسش ۱ ـ (صفحه 64 ، شماره 9)

آ) پوچی D معادل تمام بردار های v ای می‌باشد که برای آنها داریم:

$$Lv = Dv - Iv = 0 \Rightarrow Dv = Iv = v$$

در نتیجه هر بردار(در اینجا باتوجه به تعریف، تابع)ی است که مشتقی با خودش برابر باشد. می‌دانیم که تنها توابع به صورت ce^x هستند که مشتقشان برابر خودشان می‌باشد و بعد این توابع نیز برابر با 1 است.

ب) مانند قسمت قبل در اینجا تنها توابعی مربوط به پوچی D می‌شوند که مشتق آن a برابر خودش باشد. مجددا می‌دانیم تنها توابع به فرم ce^{ax} هستند که چنین خاصیتی دارند و به طور مشابه بعد این توابع نیز برابر با 1 می‌شود.

پرسش ۲ ـ (صفحه 64 ، شماره 10)

آ) بعد این زیرفضا برابر با $n - 1$ می‌باشد. ابتدا دقت کنید که $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ که بردار های پایه‌ای استاندارد می‌باشند، $n - 1$ بردار مستقل خطی درون این فضا هستند. همچنین چون هر برداری درون این فضا که $n - 1$ مولفه اولش مشخص باشد، چون جمع مولفه هایش باید برابر با صفر شود، به طور یکتا مشخص می‌شود، پس بنابراین می‌توان هر برداری در فضا را به صورت ترکیب خطی یکتایی از این بردار های پایه‌ای نیز نوشت و بنابراین این بردار ها تشکیل یک پایه برای این زیرفضا می‌دهند و بعد این زیرفضا برابر با $n - 1$ می‌باشد.

ب) مشابه قسمت قبل می‌توان نشان داد که بعد این فضا برابر با $n^2 - 1$ می‌باشد زیرا می‌توان

$$E_{1,1}, E_{1,2}, \dots E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{2,n}, \dots E_{n,n-1}$$

را در نظر گرفت که $E_{i,j}$ ماتریسی است که تنها درایه در سطر i و ستون jمش 1 می‌باشد و همچنین به سادگی می‌توان دید که این بردار ها تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند.

پرسش ۳ ـ (صفحه 64 ، شماره 11)

آ) ابتدا واضح است که 0 عضو این فضا می‌باشد زیرا هر ماتریسی که تمام درایه های روی قطرش صفر باشد، تریس 0 دارد. همچنین به سادگی می‌توان دید که اگر دو ماتریس مانند A و B داشته باشیم، آنگاه $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ و در نتیجه تریس های ماتریس ها نسبت به جمع بسته می‌باشند. همچنین به ازای هر $c \in K$ ، اگر درایه های روی قطر هر ماتریس دلخواه مانند A را c برابر کنیم، تریس آن نیز c برابر می‌شود. در نتیجه تریس نسبت به ضرب نیز بسته بوده و در نتیجه تریس یک نگاشت خطی می‌باشد.

ب) به سوال 5 تمرین سری 2 مراجعه شود.
پ) طبق نتیجه قسمت قبل می‌دانیم(دقت کنید که دو ماتریسی که در اینجا جابه‌جایشان می‌کنیم، B^{-1} و AB هستند):

$$tr(B^{-1}AB) = tr(ABB^{-1}) = tr(AI) = tr(A)$$

در نتیجه حکم برقرار می‌باشد.
ت) 3 شرط را بررسی می‌کنیم:

$$< A, B >= tr(AB) = tr(BA) =< B, A >$$

$$< cA, B >= tr(cAB) = ctr(AB) = c < A, B >$$

$$< A+C, B >= tr((A+C)B) = tr(AB+CB) = tr(AB)+tr(CB) =< A, B > + < C, B >$$

و در نتیجه این رابطه یک ضرب نقطه‌ای را تعریف می‌کند.
ث) توجه کنید که برای هر دو ماتریس یکسان، تریس آن دو نیز یکسان می‌باشد؛ در نتیجه باید داشته باشیم:

$$tr(AB - BA) = tr(I_n)$$

اما نشان دایم که

$$tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA) = 0$$

و این یعنی تریس ماتریس همانی نیز باید صفر باشد که می‌دانیم چنین نیست. در نتیجه نمی‌توان هیچ دو ماتریس A و Bای را یافت که چنین خاصیتی داشته باشند.

پرسش ۴ ــ (صفحه 64 ، شماره 13)

داریم:

$$tr(AA) = \sum_{i=1}^{n} AA_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} A_i * {A_i}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} * A_{j,i}$$

که چون A ماتریسی متقارن می‌باشد بنابراین هرکدام از جمعوند های بالا نامنفی هستند و تنها در حالتی جمع کلی صفر می‌شود که A برابر ماتریس تمام صفر باشد.

پرسش ۵ ــ (صفحه 65 ، شماره 16)

آ) برای ماتریس های متقارن $F(A) = 0$ بوده و در نتیجه 0 عضو فضا می‌باشد. همچنین داریم:

$$F(A+B) = \frac{(A+B) - (A+B)^T}{2} = \frac{A + B - A^T - B^T}{2} = \frac{A - A^T}{2} + \frac{B - B^T}{2} = F(A)+F(B)$$

و در نتیجه F تحت جمع بسته می‌باشد. همچنین

$$F(cA) = \frac{cA - (cA)^T}{2} = \frac{cA - cA^T}{2} = \frac{c(A - A^T)}{2} = cF(A)$$

و در نتیجه F تحت ضرب نیز بسته بوده و بنابراین نگاشتی خطی می‌باشد.

ب) فرض کنید یک ماتریس A عضو پوچی F باشد؛ در این صورت داریم:

$$F(A) = \frac{A - A^T}{2} = 0 \Rightarrow A = A^T$$

و در نتیجه پوچی F متناظر با ماتریس های متقارن می‌باشد. حال به سادگی می‌توان دید که بعد این فضا برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد زیرا با تعیین کردن درایه های زیر قطر اصلی تمام ماتریس مشخص می‌شود و در نتیجه بعد این فضا حداکثر برابر این مقدار می‌باشد، از طرف دیگر ماتریس هایی که تنها یکی از درایه های زیر قطر اصلی‌شان برابر 1 و دیگر درایه هایشان مساوی صفر است، به وضوح مستقل خطی می‌باشند و بنابراین تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند و در نتیجه بعد این فضا برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد.

پرسش ۶ ــ (صفحه 66 ، شماره 18)

فرض کنید $Y = U \cap W$ باشد. $y_1, y_2, \ldots, y_t$ را پایه‌ای برای Y ، $u_1, u_2, \ldots, u_l$ را پایه‌ای برای $U \setminus Y$ و $w_1, w_2, \ldots, w_k$ را پایه‌ای برای $W \setminus Y$ در نظر بگیرید. اجتماع y_i ها و u_j ها پایه‌ای برای U ، اجتماع y_i ها و w_r ها پایه‌ای برای W و همچنین اجتماع کل این 3 پایه، پایه‌ای برای $U + W$ می‌باشد(چرا؟). در نتیجه عبارت داده شده از رابطه بین اندازه پایه و ها و بعد فضا و استدلال های بالا ثابت می‌شود.

پرسش ۷ ــ (صفحه 71 ، شماره 10)

ابتدا نشان می‌دهیم که $Ker\ P \cap Im\ P = O$ و هیچ برداری مربوط به اشتراک این دو نمی‌شود. بردار v مربوط به $Ker\ P$ را در نظر بگیرید. حال فرض کنید u به طوری باشد که داشته باشیم: $Pu = v$ و در نتیجه v متعلق به $Im\ P$ نیز باشد. چون طبق فرض می‌دانیم که $P^2 = P$ در نتیجه داریم:

$$v = Pu = P^2u = Pv = 0$$

در نتیجه تنها 0 می‌تواند متعلق به هر دوی $Im\ P$ و $Ker\ P$ باشد و بنابراین این دو فضا هیچ اشتراکی ندارند. حال طبق قضیه اساسی جبرخطی می‌دانیم که:

$$dimV = dim(Ker\ P) + dim(Im\ P)$$

و چون در اینجا نشان دادیم که $Ker\ P$ و $Im\ P$ مجزا هستند، بنابراین هر بردار درون V متعلق به دقیقا یکی از این دو می‌باشد(باتوجه به این که مجموع بعد دو فضا برابر بعد کل فضا می‌باشد) و بنابراین حکم اثبات می‌شود.

پرسش ۸ ــ (صفحه 71 ، شماره 11)

ابتدا یک بردار دلخواه v را درون $Im\ P$ در نظر بگیرید. در نتیجه می‌دانیم بردار u وجود دارد که:

$$v = Pu$$

حال اگر Q را در دو طرف این تساوی اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$Qv = QPu = 0$$

که تساوی دوم به علت خاصیت دوم عملگرهای P و Q می‌باشد. در نتیجه $v \in Ker\ Q$ می‌باشد. به طور مشابه می‌توان نشان داد که اگر $v \in Im\ Q$ باشد نیز داریم $v \in Ker\ P$. حال چون طبق سوال قبلی می‌دانیم که پوچی و تصویر P و Q اشتراکی ندارند، در نتیجه هر بردار v می‌تواند متعلق به حداکثر یکی از $Im\ P$ و $Im\ Q$ باشد. حال از فرض اول می‌دانیم که به ازای هر بردار دلخواه v داریم:

$$Pv + Qv = v$$

و همچنین نشان دادیم که هر بردار حداکثر متعلق به یکی از تصویر های P و Q می‌باشد و در نتیجه یکی از جمعوند های بالا برابر صفر است. در نتیجه هر بردار دلخواه در فضا نیز دقیقا متعلق به تصویر یکی از P و Q می‌باشد و بنابراین اثبات می‌شود که V برابر با جمع مستقیم $Im\ P$ و $Im\ Q$ می‌باشد.