

میان ترم جبر خطی ۱ سری اول

در تمام سوالات V یک فضای برداری با بعد n روی \mathbb{R} یا \mathbb{C} است.

سوال اول

فرض کنید $V = U \oplus W$ است. اگر E زیر فضای دلخواهی از V باشد، نشان دهید:

$$2 \dim E - \dim V \leq \dim((U \cap E) \oplus (W \cap E)) \leq \dim E$$

سوال دوم

فرض کنید W یک فضای برداری دلخواه و $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ باشد. نشان دهید:

$$\text{Im } T_1 = \text{Im } T_2 \Leftrightarrow \exists S \in \mathcal{L}(V), T_1 = T_2 S$$

وارون پذیر

سوال سوم

فرض کنید $T \in \mathcal{L}(V)$ و $\text{rank } T = 1$ است. نشان دهید یا T قطری شدنی است یا $T^2 = 0$ است.

سوال چهارم

عملگر خطی دلخواه $T \in \mathcal{L}(V)$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که:

$$\dim(\text{null}(T^{n+1})) = \dim(\text{null}(T)) + \sum_{i=1}^n \dim(\text{range}(T^i) \cap \text{null}(T))$$

$$\dim(\text{range}(T)) = \dim(\text{range}(T^{n+1})) + \sum_{i=1}^n \dim(\text{range}(T^i) \cap \text{null}(T))$$

سوال پنجم

فضای خطی V و فضای دوگان V' متناظر با آن را در نظر بگیرید. فضای پوچ ساز W را طبق نماد کتاب با W^0 نشان می‌دهیم. به ازای هر دو زیر فضای دلخواه W, Z از V ، ثابت کنید:

$$V = W \oplus Z \Leftrightarrow V' = W^0 \oplus Z^0$$

سوال ششم

ثابت کنید هر ماتریس مربعی A را می‌توان به صورت حاصل جمع دو ماتریس وارون پذیر نوشت