۱

چندجمله‌ای مشخصه برابر است با:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & 0 & \\ 2 & 2 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2-2x+1)$$
$$= x^2(x-1)^2$$
.

چندجمله‌ای مینیمال باید یکی از $x^2(x-1)^2, x^2(x-1), x(x-1)^2, x(x-1)$ باشد.نشان می‌دهیم A در 3تای اول ناصفر است.داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A-I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$A(A-I) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \neq 0, A^2(A-I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$
$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

پس چندجمله‌ای مینیمال باید $x^2(x-1)^2$ باشد.

۲

فرض کنید $x \in kernel\ A$ آنگاه $a_{ij}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$ برای هر i. قرار دهید i را به طوری که $M = |x_i| = max_k|x_k|$ آنگاه $|a_{ii}|M \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|M$ پس $0 \leq (|a_{ii}|\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)M$. از آنجایی که داخل پرانتز مثبت است پس باید داشته باشیم $M = 0$ پس $x = 0$ و A وارون‌پذیر است.

۳

قرار دهید $v_1, ..., v_n$ را یک پایه از V که شامل بردار ویژه‌های تعمیم‌یافته T باشد. تعریف کنید $\langle .,. \rangle : V \times V \to C$ که $\langle a_1v_1 + ... + a_nv_n, b_1v_1 + ... + b_nv_n \rangle = a_1\overline{b_1} + ... + a_n\overline{b_n}$ که aها و bها مختلط هستند. می‌توانید چک کنید که $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی خوش‌تعریف روی V است پس $v_1, ..., v_n$ یک پایه متعامد یکه از V است. هم‌چنین فضاهای ویژه تعمیم‌یافته T متعامد یکدیگرند پس اگر $v \in G(\beta, T)$ آنگاه:

$$P_{G(\alpha,T)}v = \begin{cases} v, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad (1)$$

که $P_{G(\alpha,T)}$ تصویر قائم V روی $G(\alpha,T)$ است.
قرار دهید $\lambda_1, ..., \lambda_m$ را مقدار ویژه‌های متمایز T. داریم:

$$T = T|_{G(\lambda_1,T)}P_{G(\lambda_1,T)} + ... + T|_{G(\lambda_m,T)}P_{G(\lambda_m,T)}$$

برای هر $j = 1, ..., m$ می‌توانیم بنویسیم $T|_{G(\lambda_j,T)} = \lambda_j I + N_j$ که N_j یک عملگر پوچ‌توان است که $G(\lambda_j,T)$ تحت آن پایا است. پس داریم:

$$T = (\lambda_1 I + N_1)P_{G(\lambda_1,T)} + ... + (\lambda_m I + N_m)P_{G(\lambda_m,T)} =$$

$$\underbrace{\lambda_1 P_{G(\lambda_1,T)} + ... + \lambda_m P_{G(\lambda_m,T)}}_{(2)} + \underbrace{N_1 P_{G(\lambda_1,T)} + ... + N_m P_{G(\lambda_m,T)}}_{(3)}$$

برای یک $k \in \{1, ..., n\}$ثابت داریم $v_k \in G(\lambda_j,T)$ برای یک $j \in \{1, ..., m\}$. (1) نشان می‌دهد (2) v_k را به $\lambda_j v_k$ می‌برد.پس $v_1, ..., v_n$ یک پایه از بردارهای ویژه (2) است پس (2) قطری‌شدنی است. (1) هم‌چنین نشان می‌دهد که (3) v_k را به $N_j v_k$ می‌برد اما $G(\lambda_j,T)$ تحت N_j پایا است پس (1) درواقع نشان می‌دهد (3) به توان $dim\ V$ ،v_k را به $N_j^{dim\ V} v_k$ می‌برد که برابر 0 است پس (3) پوچ‌توان است. به سادگی دیده می‌شود که (2)، (3) در حکم سوال صدق می‌کنند پس اثبات کامل می‌شود.

۴

برای هر نگاشت T با نوشتن *polar decomposition* داریم $T = S\sqrt{T^*T}$ که در آن S یک ماتریس یکانی است داریم:

$$\left.\begin{aligned} A = S_A\sqrt{A^*A} &\overset{A^*A=B^*B}{=} S_A\sqrt{B^*B} \\ B &= S_B\sqrt{B^*B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_B S_A^* A = S_B\sqrt{B^*B} = B \Rightarrow \qquad (۱)$$

$$A = \underbrace{S_A S_B^*}_{Q} B : \begin{cases} Q^*Q = S_B S_A^* S_A S_B^* = S_B S_B^* = I \\ QQ^* = S_A S_B^* S_B S_A^* = S_A S_A^* = I \end{cases} \qquad \checkmark$$

۵

می‌دانیم ماتریس A پوچ‌توان است اگر و فقط اگر همه مقادیر ویژه آن 0 باشد. تابع $f : M_n(R) \to R$ با ضابطه $f(A) = max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\}$ که λها مقادیر ویژه A هستند یک تابع شبه‌اثر است زیرا جندجمله‌ای مشخصه AB, BA یکی هستند پس اگر $f(A) = 0$ آنگاه $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ پس A پوچ‌توان است.
برای اثبات طرف دیگر ابتدا توجه کنید که اگر f شبه‌اثر باشد آنگاه $f(A) = f(SAS^{-1})$ برای هر A و هر S وارون‌پذیر. پس می‌توان A را با یک ماتریس متشابه بدون آن که مقدار آن برای توابع شبه‌اثر تغییر کند جایگزین کرد. چون هر ماتریس پوچ‌توان با یک ماتریس پایین‌مثلثی که درایه‌های روی قطر

اصلی آن صفر است متشابه است پس بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ * & & 0 \end{bmatrix}$.
قرار دهید $E_i = diag(1, ..., 1, 0, 1, ..., 1)$ یک ماتریس قطری با درایه‌های 1 روی قطر اصلی به جز درایه (i, i) که صفر است. آنگاه $E_1A = A$ ولی AE_1 ماتریسی است که ستون اول آن صفر است پس می‌توان فرض کرد ستون اول A نیز صفر است. حال $E_2A = A$ ولی AE_2 ماتریسی است که ستون دوم آن نیز صفر است. با ادامه این روش A به ماتریسی تبدیل می‌شود که همه ستون‌های آن صفر است پس $f(A) = 0$.