

## سوال 1

فرض کنید  $W_1$  و  $W_2$  زیرفضاهای فضای برداری  $V$  باشند و تعریف کنید

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

۱. نشان دهید  $W_1 \cap W_2$  و  $W_1 + W_2$  زیرفضاهای  $V$  هستند و

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2.$$

۲. رابطه‌ی شمول قسمت قبل را به طور هندسی و با دو خطی که در صفحه از مرکز مختصات می‌گذرند، توضیح دهید.

۳. با چه شرایطی  $W_1 \cup W_2$  یک زیرفضا از  $V$  است؟

۴. نشان دهید  $W_1 + W_2$  کوچک‌ترین زیرفضا از  $V$  است که شامل  $W_1 \cup W_2$  است، به بیانی دیگر، اگر  $S$  زیرفضای  $V$  و شامل  $W_1 \cup W_2$  باشد، آنگاه  $W_1 + W_2 \subseteq S$ .

## سوال 2

فرض کنید  $X$  فضای برداری همه‌ی چندجمله‌های با درجه‌ی کوچک‌تر از  $n$  و  $Y$  مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌های با درجه‌ی کوچک‌تر از  $n$  باشد که در  $t_1, t_2, \dots, t_j$  صفر می‌شوند ( $j < n$ ). ثابت کنید  $Y$  زیرفضای  $X$  است.

### سوال 3

از مجموعه‌های زیر کدام‌ها زیرفضای  $R^\infty$  هستند؟

۱. مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌هایی مانند  $(1, 0, 1, 0, \dots)$  که بینهایت صفر دارند.
۲. مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌هایی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  که از جایی به بعد صفرند.
۳. مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های نزولی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  (به‌ازای هر  $j$ ،  $x_{j+1} \leq x_j$ ).
۴. مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های همگرا مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  ( $x_j$  وقتی  $j \rightarrow \infty$  حد دارد).
۵. مجموعه‌ی همه‌ی تصاعدهای حسابی مانند  $(x_1, x_2, \dots)$  (همه‌ی  $x_{j+1} - x_j$ ها برابرند).
۶. مجموعه‌ی همه‌ی تصاعدهای هندسی مانند  $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$  (به‌ازای همه‌ی  $x_1$  و  $k$ ها).

## سوال 4

فرض کنید  $W_1$  و  $W_2$  زیرفضاهایی از  $V$  باشند به طوری که  $W_1 + W_2 = V$  و  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ . ثابت کنید برای هر بردار  $\alpha \in V$ ، بردارهای یکتای  $\alpha_1$  در  $W_1$  و  $\alpha_2$  در  $W_2$  وجود دارند به طوری که  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ .

## سوال 5

آیا یک فضای برداری روی میدان  $\mathbb{R}$  را می‌توان به صورت اجتماع متناهی زیرفضای سره از آن نوشت؟