فلسفه ریاضیات

۲۲-۱۲۶

نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

A. Introductory Texts

- **Bostock, D.** *Philosophy of Mathematics: An Introduction* (2009)
- **Brown, J. R.** *Philosophy of Mathematics*, 2nded (2008)
- **Çevik, A.** *Philosophy of Mathematics: Classic and Contemporary* Studies (2022)
- **Colyvan, M.** *An Introduction to the Philosophy of Mathematics* (2011)
- **Friend, M.** *Introducing Philosophy of Mathematics* (2007)
- **George, A. and D. Velleman** *Philosophies of Mathematics* (2002)
- **Hamkins, J. D.** *Lectures on the Philosophy of Mathematics* (2020)
- **Körner, S.** *The Philosophy of Mathematics: An Introductory Essay* (1960)
- **Linnebo, Ø.** *Philosophy of Mathematics* (2017)
- **Ravn, O. and O. Skovsmose** *Connecting Humans to Equations* (2019)
- **Shapiro, S.** *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics* (2000)

- *Recommended as course texts*
- *Old but good*
- *Good, philosophy oriented*

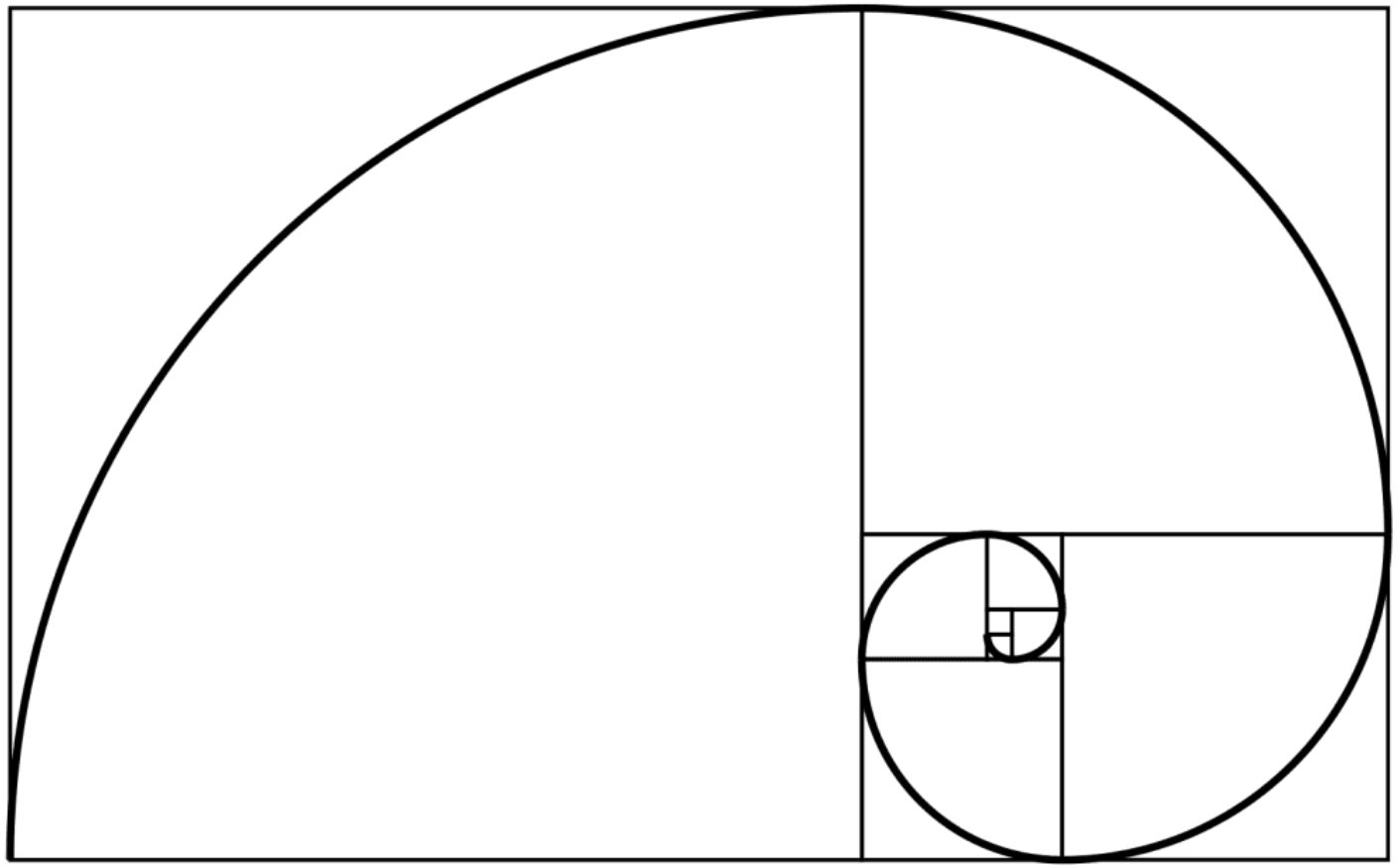
B. General Collections of Essays

- Benacerraf, P. and H. Putnam *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 2nded (1983)
- Dybjer, P. et al *Epistemology versus Ontology* (2012)
- Ewald, W. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Vols. 1&2 (1996)
- Hart, W. *The Philosophy of Mathematics* (1996)
- Irvine, A.D. *Philosophy of Mathematics* (2009)
- Lindström, S., et al *Logicism, Intuitionism and Formalism: What has become of them?* (2009)
- Shapiro, S. *The Oxford Handbook of the Philosophy of Mathematics and Logic* (2005)

Chronology: `Greek' Mathematics

Thales	-590	Euclid	-300
Pythagoras	-530	Archimedes	-250
Theaetetus	-390	Apollonius	-220
Plato	-380	Nicomachus	+90
Eudoxus	-370	Diophantus	+250
Aristotle	-350	Pappus	+300

مستطیل طلایی



مراجع اصلی افلاطون

- ***Collected Dialogues, including the Letters***

  Hamilton & H. Cairns (Eds.), Princeton U. Press 1963

- Wedberg, A. ***Plato's Philosophy of Mathematics***

  Almquist and Wiksell 1955

گفتگوهای اصلی مربوط به ریاضیات و معرفت شناسی

- **Meno, Republic**
- **Phaedo, Theaetetus, Parmenides, Philebus, Timaeus**
- **Gorgias, Phaedrus, Laws**

مراجع اصلی ارسطو

- ***The Basic Works of Aristotle***
  McKeon, R. (ed.), Modern Library 2001
- McKeon, R. ***Introduction to Aristotle***, Modern Library 1947
- Bostock, D. `Aristotle's Philosophy of Mathematics' in
  Oxford Handbook of Aristotle (2012)
- Mendell, H. `Aristotle and Mathematics', in
  Stanford Encyclopedia of Philosophy
  https://plato.stanford.edu/entries/aristotle-mathematics/

ارجاعات به آثار ارسطو

- ***Metaphysica*** (مابعدالطبیعه) **:** I.9, II.2, III.5-6, V.2, IX.9, X.1-3, XI.10-12, XIII.1-10, XIV.1-6
- ***Physica*** (طبیعیات) **:** II.2-3, III.4-8, V.3, VI.1-10
- ***Categoriae*** (مقولات) : V.6
- ***Analytica Priora*** (منطق) : I.1-13, 27-30
- ***Analytica Posteriora*** (آنالوطیقای‌دوم) **:** I.1-2, I.7, I.26
- ***De Anima*** (روح) **:** III.3, III.7
- ***De Caelo*** (سماوات) **:** I.2, I.5-7, II.13-14

ماهیت اشیاء ریاضی

- The faculty of thinking then thinks the forms in images…the mind when it is thinking the objects of Mathematics thinks as separate, elements that do not exist as separate. In every case the mind which is actively thinking is the objects which it thinks. ***De Anima*****:** III.7

- Now the mathematician, though he too treats these things, nevertheless does not treat them as limits of physical body; nor does he consider the attributes indicated as the attributes of such bodies. That is, he separates them; for in thought they are separable from motion, and it makes no difference, nor does any falsity result, if they are separated. ***Physica***: II.2

Analytica Posteriora, I.2 مبنای دانش علمی

We suppose ourselves to possess unqualified scientific knowledge of a thing, as opposed to knowing it in an accidental way… when we know the cause on which the fact depends…
What I now assert is that at all events we do know by demonstration. I mean a syllogism productive of scientific knowledge, a syllogism, that is, the grasp of which is *eo ipso* such knowledge. Assuming then my thesis as to the nature of scientific knowing is correct, the premises of demonstrated knowledge must be true, primary, immediate, better known than and prior to the conclusion, which is further related to them as effect to cause… The premises must be true: for that which is non-existent cannot be known – we cannot know, e.g., that the diagonal of a square is commensurable with side.

Analytica Posteriora, I.2

مبنای دانش علمی

We suppose ourselves to possess unqualified scientific knowledge of a thing, as opposed to knowing it in an accidental way… when we know the cause on which the fact depends…What I now assert is that at all events we do know by demonstration. I mean a syllogism productive of scientific knowledge, a syllogism, that is, the grasp of which is *eo ipso* such knowledge. Assuming then my thesis as to the nature of scientific knowing is correct, the premises of demonstrated knowledge must be true, primary, immediate, better known than and prior to the conclusion, which is further related to them as effect to cause…

Discrete vs Continuous: *Categoriae*, V.6

Quantity is either discrete or continuous…Instances of discrete are numbers and speech; of continuous, lines, surfaces, solids, and, besides these, time and place…
In the case of the parts of a number, there is no common boundary at which they join. For example: two fives make ten, but the two fives have no common boundary, but are separate; the parts three and seven also do not join at any boundary… Number, therefore, is a discrete quantity…A line, on the other hand, is a continuous quantity, for it is possible to find a common boundary at which its parts join. In the case of the line, this common boundary is the point…

Discrete vs Continuous: *Analytica Posteriora*, I.7

It follows that we cannot in demonstrating pass from one genus to another. We cannot, for instance, prove geometrical truths by arithmetic. For there are three elements in demonstration: (1) what is proved, the conclusion – an attribute inhering essentially in a genus; (2) the axioms, i.e., the axioms which are premises of demonstration; (3) the subject genus whose attributes, i.e., essential properties, are revealed by the demonstration. The axioms which are the premises of demonstration may be identical in two or more sciences: but in the case of two different genera such as arithmetic and geometry you cannot apply arithmetical demonstration to the properties of magnitudes unless the magnitudes in question are numbers…(cont.)

Discrete vs Continuous: *Analytica Posteriora*, I.7

Arithmetical demonstration and the other sciences likewise possess, each of them, their own genera; so that if the demonstration is to pass from one sphere to another, the genus must be either absolutely or to some extent the same. If this is not so, transference is clearly impossible, because the extreme and the middle terms must be drawn from the same genus: otherwise as predicated, they will not be essential and will thus be accidents. That is why it cannot be proved by geometry that …the product of two cubes is a cube.

Summary Contents of Euclid's *Elements*

Book	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	Totals
Definitions	23	2	11	7	18	4	22	–	–	16	28	–	–	131
Postulates	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5
Common Notions	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5
Propositions	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%27s_Elements
(February 9,2024)

منابع ریاضیات دوره اسلامی

- منابع اولیه به عربی و ترجمه‌های فارسی و زبان‌های اروپایی
- مقالات متعدد به‌خصوص از Roshdi Rashed و Jan Hogendijk
- از دوکتاب زیر خیلی استفاده شده است:

Rashed, R. ***The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algeba***,1994

Rashed,R. & B. Vahabzadeh

Omar Khayyam, the Mathematician, 2000

مطالب این کتاب شامل محاسباتی است درارث ووصیت ومقاسمه (= تقسیم کردن اموال مشترك) و اموردیوانی وتجارت، و نیز درمورد تمام اموری که به‌حساب ومعامله مربوط می‌شود ـ مانند: مساحت کردن زمینها و اندازه گیری نهرها و هندسه (= نقشه کشی) و دیگر مباحث و فنون ریاضی ـ قابل استفاده خواهد بود. این کتاب را با حسن‌نیتی که

- از مقدمه *جبر و مقابله* خوارزمی، ترجمه حسین خدیوجم
- انتشارات اطلاعات، ۱۳۶۳

بحث ائودوکسوس (فصل پنج اقلیدس) از مقایسه دو نسبت :

A و **B** دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن، و **C** و **D** دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن (دیگر) هستند . نسبت **(A:B)** را برابر نسبت **(C:D)** می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر دو عدد صحیح(مثبت) **m** و **n** (حداکثر) دفعاتی که **nB** در **mA** می گنجد برابر (حداکثر) دفعاتی باشد که **nD** در **mC** می گنجد . چنانچه تعداد دفعات مربوط به **(A:B)** از تعداد دفعات مربوط به **(C:D)** کوچک‌تر باشد ، نسبت **(A:B)** ازنسبت **(C:D)** بزرگتر است.

توجه : برابری دو نسبت ناگویا در تعدادی متناهی گام نتیجه نمی‌شود .

بحث خیام از مقایسه دو نسبت :

A و **B** دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن، و **C** و **D** دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن (دیگر) هستند . برای نسبت **(A:B)** نمایش کسر مسلسل $[r_0;r_1,r_2,r_3,...]$ وبرای نسبت نمایش **(C:D)** کسر مسلسل $[s_0;s_1,s_2,s_3,...]$ را درنظر می گیریم . اگر به‌ازای هر **n** ، r_n و s_n برابر باشند می گوییم دو نسبت برابرند . فرض کنید **n** کوچکترین مرتبه‌ای باشد که مثلا $r_n < s_n$ چنانچه **n** فرد باشد، نسبت **(A:B)** از نسبت **(C:D)** بزرگتر است، و چنانچه **n** زوج باشد، نسبت **(A:B)** از نسبت **(C:D)** کوچکتر است

توجه : برابری دو نسبت ناگویا در تعدادی متناهی گام نتیجه نمی‌شود .

منابع فلسفه ریاضیات دوره اسلامی

Ardeshir, M. `Ibn Sina's Philosophy of Mathematics,' in ***The Unity of Science in the Arabic Tradition***, 2008

Zarepour,M.S. `Arabic and Islamic Philosophy of Mathematics,' in ***Stanford Encyclopedia of Philosophy***, 2002 https://plato.stanford.edu/entries/arabic-islamic-phil-math/

Wisnovsky, R. ***Aspects of Avicenna***, 2001 (Articles by D. Gutas and D.N. Hasse)

Black, D.L. `Estimation in Avicenna: The Logical and Psychological Dimensions,' ***Dialogue*** 32, 219-58 (1993)

Greek → Arabic → Latin

Thales	-590	Pappus	+320	Samaw'al	+1150
Pythagoras	-530	Eutocius	+510	Tusi, Nasireddin	+1200
Theaetetus	-390	Khwarizmi	+810	Fibonacci	+1202
Eudoxus	-370	Mahani	+820	Kashi	+1420
Euclid	-300	Karaji	+950	Cardano	+1545
Archimedes	-250	Ibn-Haytham	+1020	Viète	+1570
Apollonius	-220	Khayyam	+1090	Stevin	+1585
Diophantus	+250	Tusi, Sharafeddin	+1135	Descartes	+1637

رومی‌ها و ریاضیات

- نقل از **Cicero** :

یونانیان هندسه را بسیار ارج می‌نهادند و از اینرو برای هیچکس به اندازه ریاضی‌دانان احترام قائل نبودند، ولی رومیان این فن را به وسیله‌ای برای اندازه‌گیری و محاسبه محدود کرده‌اند .

نقل از **Plutarch** :

فن ساختن ابزار هندسی را آرخیتاس و ائودوکسوس ابداع کردند و موفق شدند بعضی ترسیمات را که با خطکش و پرگار ممکن نبود با این ابزار انجام دهند . ولی افلاطون آنها را به اتهام تنزل دادن مقام هندسه سرزنش کرد . . . به این سبب مکانیک از هندسه جدا شد و از جرگه فلسفه به یک فن نظامی مبدل گشت .

اروپای قرن شانزده

Gerolamo Cardano	***Ars Magna* (1545)** حل جبری معادلات درجه۳ و ۴، پذیرش اعداد منفی و به‌کارگیری محدود اعداد موهومی
Simon Stevin	***De Thiende* (1585), *L'arithmétique* (1585)** رواج دادن عددنویسی (کسری) اعشاری در اروپا، یکپارچه کردن مفهوم عدد حقیقی، قضیه مقدار بینی برای چندجمله‌ایها
François Viète	***Algebra Nova* (1591), *Supplementum geometriae* (1593)** آغاز استفاده کامل از جبر نمادین، پیشتاز هندسه تحلیلی

René Descartes (1596-1650)

- **Here I beg you to observe in passing that the scruples that ancient writers observed in using arithmetical terms in geometry, thus making it impossible for them to proceed beyond a point where they could see clearly the relation between the two subjects, caused much obscurity and embarrassment, in their attempts at explanation.**
- **I would borrow the best of geometry and of algebra and correct all the faults of the one by the other.**

اولین جملات کتاب هندسه دکارت:

Any problem in geometry can easily be reduced to such terms that a knowledge of the lengths of certain straight lines is sufficient for its construction. Just as arithmetic consists of only four or five operations, namely addition, subtraction, multiplication, division and the extraction of roots, which may be considered a kind of division, so in geometry, to find required lines it is merely necessary to add or subtract other lines; or else, taking one line which I shall call unity in order to relate it as closely as possible to numbers, and which can in general be chosen arbitrarily …

مراجع دكارت:

- ***The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition*** (Dover 1954)
- ***Discourse on the Method, Optics, Geometry and Meteorology*** (Hackett 2001)
- ***Meditations on First Philosophy*** (Cambridge 1996)

اخترشناسی و فیزیک قرون ۱۶ و ۱۷ قبل از نیوتن

Nicolaus Copernicus (1473-1543)
Galileo Galilei (1564-1642)
Johannes Kepler (1571-1630)

قوانین کپلر:

۱ – سیارات در مدارهای بیضی دور خورشید می‌گردند و خورشید در یک کانون بیضی قرار دارد.

۲ – در زمان‌های مساوی شعاع حامل از سیاره به خورشید مساحت مساوی می‌پیماید.

۳ – مجذور زمان یک دور مدار متناسب با مکعب نیم شعاع بزرگ بیضی است.

حسابان قرون ۱۶ و ۱۷ قبل از نیوتن و لایب‌نیتس

- **Johannes Kepler** (1571-1630)
- **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647)
- **Pierre de Fermat** (1601-1665)
- **John Wallis** (1616-1703)
- **Blaise Pascal** (1623-1662)
- **Isaac Barrow** (1630-1677)

نقل از مقدمه چاپ نشده کتاب *پرینکیپای* نیوتن:

The ancient geometers investigated by analysis what was sought, demonstrated by synthesis what had been found, and published what had been demonstrated so that it might be received into geometry. What was resolved was not immediately received into geometry; a solution by means of the composition of demonstrations was required. For all the power and glory of geometry consisted in certainty of things, and certainty consisted in demonstrations clearly composed. In this science what counts is not so much brevity as certainty. And accordingly, in the following treatise I have demonstrated by synthesis the propositions found by analysis.

نقل از توضیحات یازده لم فصل اول کتاب نیوتن (۱) :

... این لم‌ها را قبل از گزاره‌ها از اینرو آورده‌ام که از برهان‌های طولانی و کسل‌کننده به روش برهان خلف که شیوه هندسه‌دانان باستانی است احتراز کنم. اثبات با توسل به تجزیه‌ناپذیرها [indivisibles = بینهایت کوچکها] درواقع کوتاهتر است ولی از آنجا که تجزیه‌ناپذیرها مساله‌دار هستند و کمتر هندسی فرض می‌شوند، ترجیح داده‌ام برهان‌های بعدی را بر اساس مجموع‌ها و نسبت‌های غائی کمیت‌های میرا استوار کنم، یعنی حدّ چنین مجموع‌ها و نسبت‌ها....

نقل از توضیحات یازده لم فصل اول کتاب نیوتن (۲) :

...ممکن است ایراد گرفته شود که چیزی به عنوان نسبت غائی کمیت‌های میرا وجود ندارد زیرا قبل از صفر شدن نسبت غائی نیست، و پس از آن دیگر وجود ندارد، ولی با همین استدلال سرعت یک جسم در یک نقطه هم معنی ندارد زیرا قبل از آنکه به آن نقطه برسد سرعت غائی نیست و وقتی به آن نقطه برسد سرعتی در کار نیست ...

نسبت‌های غائی کمیت‌های میرا در واقع نسبت‌های کمیت‌های غائی نیستند، بلکه حدّ نسبت‌هایی هستند که این کمیت‌ها می‌گیرند ...

این موضوع را بهتر می‌توان درمورد کمیت‌هایی که بی‌انتها بزرگ می‌شوند دریافت. اگر دو کمیت هردو به بینهایت میل کنند، نسبت آنها می‌تواند به مقدار معینی میل کند ...

G.W.Leibniz (1646-1716)

ابداع نمادهای متداول و کارساز:

dx, dz/dx=(dz/dy).(dy/dx), $\int f(x)dx$

توسعه ریاضیات و فیزیک ریاضی در اروپای قاره‌ای با استفاده از

حسابان لایب‌نیتس در قرون ۱۷ و ۱۸ توسط:

L'Hospital, Bernoulli family, Euler, Lagrange, d'Alembert, Laplace, Legendre, Fourier, …

مراجعی برای لایب‌نیتس

- Goethe, Beeley and Rabouin (eds.):
  G. W. Leibniz, Interrelations between
  Mathematics and Philosophy
- Russell, B. *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*

نقل از نامه‌ای به مخاطبی در هلند (۱۶۹۴):

Whether infinite extensions successively greater and greater, or infinitely small ones successively less and less, are legitimate considerations, is a matter that I own to be possibly open to question;… it will be sufficient …that the error that anyone may assign may be less than a certain assigned quantity … it will be sufficient simply to make use of them as a tool that has advantages for the purpose of calculation, just as the algebraists retain imaginary roots with great profit.

تجربه گرایان بریتانیائی

- **John Locke** (1632-1704) *An Essay on Human Understanding* (1689)

  جستاری در خصوص فاهمه بشری (ترجمه کاوه لاجوردی)

- **George Berkeley** (1685-1753)

  A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge (1710)

  The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician (1734)

- **David Hume** (1711-1776)

  A Treatise of Human Nature (1739-40)

  An Enquiry Concerning Human Understanding (1748)

  کاوشی در خصوص فهم بشری (ترجمه کاوه لاجوردی)

نقل از *آنالیزدان* بارکلی:

And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments? And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?

و این *فلوکسیون‌ها* چه هستند؟ سرعت نموهای میرا (ناپدیدشونده)؟ و خود این نموهای میرا چه هستند؟ اینها نه کمیت‌های متناهی هستند، نه کمیت‌های بینهایت کوچک، و نه اینکه هیچ هستند. شاید بتوانیم آنهارا ارواح کمیت‌های محوشونده بنامیم؟

Immanuel Kant (1727-1804)

زاده و زیسته در Königsberg پروس (اکنونKaliningrad در روسیه)

- ***Critique of Pure Reason*** (1781, 1787)

  سنجش خرد ناب (میرشمس‌الدین ادیب سلطانی)، *نقد عقل محض* (بهروز نظری)

  B 1-30, B 31-73, B 176-187, B 204-205, B 741-766

- ***Prolegomena to Any Future Metaphysics*** (1783)

  تمهیدات (غلامعلی حداد عادل)

  4:255-305, Sections 1-22

- ***Prize Essay*** (1764)
- ***Inaugural Dissertation*** (1770)

منابع ثانوی مورد استفاده

- Posy, C. (Ed.) ***Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays***, 1992. (Especially articles by J. Hintikka and C. Parsons.)
- Journal articles by **Michael Friedman** and **Emily Carson**
- Janiak, A. `Kant's View on Space and Time,' in

  Stanford Encyclopedia of Philosophy

  https://plato.stanford.edu/entries/kant-spacetime/#WhatTranReal (2022)
- Shabel, L. `Kant's Philosophy of Mathematics,' in

  Stanford Encyclopedia of Philosophy

  https://plato.stanford.edu/entries/kant-mathematical (2013)

چند کتاب جدیدتر:

- Carson, E. and L. Shabel ***Kant: Studies on Mathematics in the Critical Philosophy***, 2017
- Posy, C. and O. Rechter ***Kant's Philosophy of Mathematics, Volume1: The Critical Philosophy and its Roots***, 2020
- Shabel, L. ***Mathematics in Kant's Philosphy: Reflections on Practice***, 2003
- Sutherland, D. ***Kant's Mathematical World: Mathematics, Cognition and Experience***, 2022

واژگان کانت

آلمانی	انگلیسی	فارسی
Anschauung	Intuition	شهود
Begriff	Concept	مفهوم
Einzelnes	Singular	منفرد، تکین
Empfindung	Sensation	احساس
Erkenntis	Cognition	شناخت
Gemüth	Mind	ذهن
Sinnlichkeit	Sensibility	حساسیت، توان احساس
Urteil	Judgment	داوری، حکم
Verstand	Understanding	فهم، فاهمه
Vorstellung	Representation	نمایش

قطعاتی از تمهیدات، بخش ۱۳

- زمانی ریاضی‌دانانی که فیلسوف نیز بودند به شک افتادند ...در مورد اعتبارعینی ... هندسه زیرا نگران بودند که مبادا خط در طبیعت ممکن است واقعا از نقاط فیزیکی تشکیل شده باشد ...علی‌رغم اینکه فضایی که هندسه‌دان در ذهن دارد [چنین نیست] ...آنها متوجه نبودند که [این فضای هندسی] فضای اشیاء واقعی نیست، بلکه صورتی از نمایش حسی ماست، همه اشیاء آن فقط ظاهر هستند، نه خود اشیاء، بلکه نمایش آنها در شهود حسی ما ... (از *یادداشت ۱*، *A 287*)

قطعاتی از تمهیدات، بخش ۱۳

- ایده‌آلیسم این ادعاست که چیزی جز موجودات تفکر وجود ندارد و هر آنچه تصور می‌کنیم نسبت به آن ادراک داریم فقط نمایشی درذهن موجودات متفکرند و چیزی در خارج متناظر با آن وجود ندارد. من در مقابل می‌گویم: چیزهایی در بیرون وجود دارند که اشیاء مورد ادراک ما هستند، در عین حال چیزی از آنها به گونه‌ای که خود ممکن است باشند نمی‌دانیم، بلکه آشنایی ما فقط از طریق ظاهر است، یعنی نمایشی که برحواس ما می‌نهند ... (*از یادداشت ۲، A289*)

قطعاتی از تمهیدات، بخش ۱۳

- در گذشته تصور می‌شد که حسیات ما تصویر درهمی از واقعیات بیرونی به‌دست می‌دهند که نمی‌توان به‌گونه‌ای روشن در آگاهی ما نمایش داد، ما برعکس نشان دادیم که [مساله] حسیات تفاوت منطقی میان روشنی و ابهام نیست، بلکه تفاوت ریشه‌ای در منشاء خود شناخت است، زیرا که شناخت حسی چیزهارا اصلا آن‌طوری که هستند نمایش نمی‌دهند، بلکه به‌گونه‌ای که بر خواس ما اثر می‌گذارند [نمایش می‌دهند] (از *یادداشت۳* ،*A 291*)

Quotations from Eric Kandel:

- **… the belief that our perceptions are precise and direct is an illusion – a perceptual illusion. The brain does not simply take the raw data that it receives through the senses and reproduces it …each sensory system first analyzes and deconstructs, then reconstructs … incoming information according to its own built-in connections and rules – shades of Immanuel Kant!** - *In Search of Memory,* p.302
- ***Aplysia*'s neural circuit proved surprisingly invariant. Not only does every animal use the same cells in the reflex circuit, but also those cells are interconnected in precisely the same way in every animal. Each sensory cell and each interneuron connects connects to a particular set of target nerves … the first insight into Kantian *a priori*...**

- *Reductionism in Art and Brain Science*, p.51

From the *Critique*: A714/B742 (1)

Philosophical cognition is rational cognition from concepts, mathematical cognition that from the construction of concepts. But to construct a concept means to exhibit a priori the intuition corresponding to it. For the construction of a concept, therefore, a nonempirical intuition is required, which consequently, as intuition, is an individual object, a but that must nevertheless, as the construction of a concept (of a general representation), express in the representation universal validity for all possible intuitions that belong under the same concept.(cont.)

From the *Critique*: A714/B742 (2)

Thus, I construct a triangle by exhibiting an object corresponding to this concept, either through mere imagination, in pure intuition, or on paper, in empirical intuition, but in both cases completely a priori, without having had to borrow the pattern for it from any experience. The individual drawn figure is empirical, and nevertheless serves to express the concept without damage to its universality …

From the *Critique*: A714/B742 (3)

Philosophical cognition thus considers the particular only in the general; mathematical cognition considers the general in the particular, nay, even in the particular instance, but nonetheless does so *a priori* and by means of reason, in such a way that, just as this single instance is determined under certain universal conditions of construction, so too the object of the concept … must be thought as universally determined.

How is Pure Mathematics Possible?

How now is a great body of cognition…which carries apodictic certainty …hence rests on no grounds of experience, and so is a pure product of reason, but beyond this is thoroughly synthetic. “How is it possible then for human reason to achieve such a cognition wholly *a priori*?”

….all mathematical cognition … must present its concept beforehand *in intuition* and indeed *a priori* … in intuition that is not empirical but pure …

- Prolegomena, Section 6

Bernard Bolzano (1781-1848)

- **Considerations on Some Objects of Elementary Geometry** (1804)
- **Contributions to a Better-Grounded Presentation of Mathematics** (1810)
- **Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign, there lies at least one real root of the equation** (1817)
- **Paradoxes of the Infinite** (1850)

Johannes Herbart (1776-1841)

امروز به عنوان یکی از پایه‌گذاران روانشناسی و علم تعلیم و تربیت مطرح است، ولی زمان خود فیلسوف محسوب می‌شد. نفوذ او بر دانشمندان زیر در روش علمی، به خصوص رویکرد مفهومی است

- **Bernhard Riemann** (1826-1866)
- **Hermann Grassmann** (1809-1877)
- **Ernst Mach** (1838-1916)

پیرامون فرض‌هایی که هندسه برمبنای آن قرار دارد

چنان که همه می‌دانند موضوع هندسه، مفهوم فضا و اصول اولیه ساخت در فضا است. این چیزها فقط به صورت اسمی تعریف می‌شوند ولی خصوصیات اساسی‌شان توسط اصول موضوع مشخص می‌شود. روابط میان این پیش‌فرضها به شکل مبهم رها می‌شود و معلوم نمی‌گردد که آیا ارتباط میان آنها ضروری است، و اگر هست به چه میزان، آیا این ارتباط پیشینی است، و آیا حتی چنین ارتباطی امکان پذیراست؟ از اقلیدس تا لژاندر (که از معروفترین اصلاح‌گران نام برده باشم) این ابهام را نه ریاضی‌دانان برطرف کرده‌اند و نه فلاسفه. بی‌شک دلیل این است که مفهوم کلی کمیت چند بعدی (که کمیات هندسی را نیز شامل می‌شود) تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است.

چند نکته خطابه ریمان

- مطرح کردن زیرساخت کمیت چند بعدی (خمینه) به عنوان جایگاه هندسه
- اینکه بینهایت نوع هندسه می‌توان روی یک خمینه وضع کرد
- هندسه محدودیت بُعد ندارد، حتی هندسه‌های بینهایت بعدی و صفربعدی قابل طرح‌اند
- تفکیک هندسه و کیهان‌شناسی در رابطه با فیزیک جهان موجود