دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردها		۷ خرداد ۱۴۰۰
	تمرین : سری ۵	
مدرّسین : دکتر شهرام خزائی و دکتر سحر قاجار		*مهلت تحویل* ۲۳ *خرداد*

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها دو مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از LaTeX، ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه دارد.
- نوشتن حداقل دو سری از تمرینات با استفاده از LaTeXالزامی می‌باشد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست .
- ارسال‌های پس از موعد(حداکثر یک هفته)، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با `arashashoori199821@gmail.com` مطرح نمایید.

پرسش ۱

دو قسمت زیر را یک بار با نامساوی مارکوف و یک بار با استفاده از ایده‌ی اثبات نامساوی مارکوف حل کنید.
آ) فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد به طوری که $E[X] = \mu$ و $X \leq 2\mu$. یک کران بالا برای $\Pr[X \leq \frac{\mu}{2}]$ بدست آورید.
ب) فرض کنید $0 < \epsilon$ و $\delta < 1$ باشد و Y یک متغیر تصادفی در بازه $[0,1]$ باشد به طوری که $E[Y] = \delta + \epsilon$ باشد. یک کران پایین برای $\Pr[Y \geq \delta + \frac{\epsilon}{2}]$ بیابید.

پرسش۲

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی دو به دو ناهم بسته با امید ریاضی μ و واریانس σ^2 باشند، نشان دهید به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم:

$$\Pr\left[\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

(یادآوری: این حکم در کلاس با فرض استقلال کامل اثبات شده است.)

پرسش ۳

اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، تابع مولد گشتاور توام آن‌ها به صورت $M_{X,Y}(t_1, t_2) = E[e^{t_1 X + t_2 Y}]$ تعریف می‌شود.
آ) $Cov(X,Y)$ را برحسب تابع $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ محاسبه کنید.
ب) فرض کنید Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، $Cov(Z, Z^2)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۴

اگر n زن و شوهر دور یک میز گرد به صورت کاملا تصادفی بنشینند، امید ریاضی و واریانس تعداد زن و شوهر هایی که کنار یکدیگر نشسته‌اند را محاسبه کنید.

پرسش ۵

آ) فرض کنید X یک متغیر تصادفی $(X \geq 1)$ و $M_X(t) = E[e^{tX}]$ تابع مولد گشتاور X باشد. نشان دهید:

$$E[\frac{e^{sX}}{X^n}] = \int_{-\infty}^{s} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_{n-2} ... \int_{-\infty}^{t_2} M_X(t_1) dt_1$$

که در آن n یک عدد طبیعی و s یک عدد حقیقی است. سپس نتیجه بگیرید که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$E[\frac{1}{X^n}] = \int_{-\infty}^{0} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_{n-2} ... \int_{-\infty}^{t_2} M_X(t_1) dt_1$$

ب) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توزیع یکسان باشند. نشان دهید: $Cov(X+Y, X-Y) = 0$
ج) گزاره زیر را اثبات کنید یا مثال نقض ارائه دهید:
اگر دو متغیر تصادفی دارای توزیع‌های حاشیه‌ای نرمال با همبستگی صفر باشند، مستقل هستند.

پرسش ۶

فرض کنید متغیر تصادفی X در بازه $[0,1]$ به صورت یکنواخت انتخاب می‌شود. سپس متغیر تصادفی R در بازه $[X,1]$ و متغیر تصادفی L در بازه $[0,X]$ به صورت یکنواخت و مستقل از یکدیگر تولید می‌شوند. متغیر تصادفی W را به صورت $W = R - L$ تعریف می‌کنیم. $Cov(W, X)$ را محاسبه کنید.

پرسش ۷

تابع مولد گشتاور برای متغیر تصادفی X، به صورت $M_X(t) = E[e^{tX}]$ تعریف می‌شود.
آ) فرض کنید به ازای $t > 0$، $M_X(t)$ تعریف شده باشد. نشان دهید:

$$\Pr(X \geq u) \leq e^{-tu} M_X(t)$$

حال فرض کنید X یک متغیر تصادفی نرمال با امید ریاضی μ و انحراف معیار σ باشد.
ب) $M_X(t)$ را محاسبه کنید و دامنه این تابع را مشخص کنید.
پ) نشان دهید:

$$\Pr\left(|X-\mu| \geq u\right) \leq 2e^{\frac{-u^2}{2\sigma^2}}$$

پرسش ۸ (امتیازی)

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی i.i.d با توزیع نرمال استاندارد باشند و $Y_1, ..., Y_n, ...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی i.i.d با توزیع نمایی و امید ریاضی 1 باشند، نشان دهید:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\Big(\max(Y_1, ..., Y_n) > \max(X_1, ..., X_n)\Big) = 1$$