



تمرین : سری ۴

مدیرسین : دکتر شهرام خزائی و دکتر سحر قاجار

مهلت تحویل ۱ خرداد

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها دو مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از \LaTeX ، ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه دارد.
- نوشتن حداقل دو سری از تمرینات با استفاده از \LaTeX الزامی می‌باشد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست .
- ارسال‌های پس از موعد(حداکثر یک هفته)، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با arashashoori199821@gmail.com مطرح نمایید.

مسأله ۱

تابع چگالی X به شکل روبه رو داده شده است. اگر امید X برابر $\frac{3}{5}$ باشد مقدار a و b را محاسبه کنید.

$$f_x = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{Oth.} \end{cases}$$

مسأله ۲

تابع چگالی توام X و Y به شکل زیر داده شده است.

$$f_{(x,y)} = \frac{1}{x^2y^2} \quad x \geq 1, y \geq 1$$

الف) تابع چگالی توام $U = XY$ و $V = X/Y$ را محاسبه کنید.

ب) توزیع حاشیه ای U و V را محاسبه کنید.

مسأله ۳

اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند، توزیع $Z = X_1/X_2$ را بیابید و مقدار $P(X_1 < X_2)$ را محاسبه کنید.

مسأله ۴

آرش و شایان باید هر یک به طور هم زمان عددی بین $[0, 1]$ انتخاب کنند. اگر آرش a و شایان s را انتخاب کند، شایان باید به اندازه $(a - s)^2$ به آرش بپردازد.

الف) فرض کنید شایان می‌داند آرش با توزیع احتمال $F_a(a)$ بازی خواهد کرد. شایان چگونه باید بازی کند؟

ب) فرض کنید آرش بداند که شایان با توزیع احتمال $F_s(s)$ بازی می‌کند. آرش باید چگونه بازی کند؟

(راهنمایی: می‌توان نشان داد که بیشینه σ_a^2 به ازای $E[a]$ ثابت برابر $(\frac{1}{2} - E[a])^2 - \frac{1}{4}$ است.)

مسأله ۵

الف) ثابت کنید تنها توزیع پیوسته بی حافظه تابع توزیع نمایی است.

ب) فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی باشند با پارامتر λ . توزیع متغیر تصادفی $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ را بدست آورید.

پ) چراغ قوه ای داریم که به آن n باتری وصل کرده ایم. عمر هر باتری توزیع نمایی با پارامتر λ است. تا زمانی که همه باتری ها خراب نشده اند چراغ قوه کار میکند. امید ریاضی زمان کار کرد چراغ قوه را بدست آورید.

مسأله ۶

الف) فرض کنید بر روی محیط دایره‌ای به شعاع 1 و مرکز $(0, 0)$ ، n نقطه به صورت یکنواخت و مستقل می‌گذاریم. این n نقطه دایره را به n بازه تقسیم می‌کنند. امید ریاضی طول بازه‌ای را که شامل نقطه‌ی $(0, 1)$ است را بیابید.
ب) فرض کنید n عدد تصادفی به صورت یکنواخت در بازه‌ی $[0, 1]$ به صورت مستقل انتخاب می‌شوند. این نقاط تصادفی بازه را به $n + 1$ قسمت تقسیم می‌کنند. تابع توزیع طول k امین بازه را محاسبه کنید. ($1 \leq k \leq n + 1$)

مسأله ۷

فرض کنید که دو متغیر تصادفی (X, Y) توزیع مشترک زیر را داشته باشند:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-Q(x,y)}{2(1-\rho^2)}} \quad ; \quad Q(x, y) = x^2 + (y - \rho x)^2 - \rho^2 x^2$$

احتمال $\Pr(Y > X > 0)$ را محاسبه کنید.

مسأله ۸

فرض کنید (X_1, X_2, \dots, X_n) یک بردار تصادفی یکنواخت از مجموعه‌ی $\{(x_1, \dots, x_n) : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1\}$ باشد. همین طور فرض کنید f یک تابع پیوسته در بازه‌ی $[0, 1]$ باشد. قرار دهید $X_0 = 0$ و

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} f(X_{i+1})(X_{i+1} - X_i)$$

نشان دهید که:

$$E[R] = \int_0^1 f(t)(1 - (1 - t)^n) dt$$