



۵ اسفند ۱۳۹۹

احتمال و کاربردها

تمرین : سری ۱

مهلت تحویل ۱۹ اسفند

مدیرسین : دکتر شهرام خزائی و دکتر سحر قاجار

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از \LaTeX ، ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه دارد.
- نوشتن حداقل دو سری از تمرینات با استفاده از \LaTeX الزامی می‌باشد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست .
- ارسال‌های پس از موعد(حداکثر یک هفته)، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با arashashoori199821@gmail.com مطرح نمایید.

پرسش ۱

مردی دو فرزند دارد. حداقل یکی از این دو فرزند پسری است که در روز جمعه به دنیا آمده است. احتمال این که فرزند دیگر پسر باشد را محاسبه کنید؟ فرض‌های خود را بیان کنید.

پرسش ۲

الف) فرض کنید C_1, C_2, \dots دنباله‌ای از پیش آمدها باشند به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(C_n) = 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(C_{n+1} \setminus C_n) < \infty$ نشان دهید که :

$$\Pr\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = 0$$

ب) در حالت قبل فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(C_{n+1} \setminus C_n) = \infty$ باشد. آیا می توان به یکی از دو نتایج
 $\Pr(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) \neq 0$ یا $\Pr(\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k) = 0$ رسید؟
 اگر بله، نتیجه درست را اثبات کنید و در غیر این صورت برای هر دو مثال نقض بیاورید.

پرسش ۳

الف) نشان دهید اصل سوم کلموگروف (countable additivity) با استفاده از قضیه پیوستگی احتمال و اصل سوم
 در حالت متناهی (finite additivity) نتیجه می شود.

ب) فرض کنید A_i ها دنباله ای از پیش آمدها باشند که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$ داشته باشیم: $\Pr(A_i) = 1$. نشان دهید:

$$\Pr[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i] = 1$$

پرسش ۴

در سبلی تعدادی توپ آبی و قرمز وجود دارد. ۲ توپ به تصادف برمی داریم. احتمال آن که هر دو قرمز باشند $\frac{1}{2}$
 است و می دانیم تعداد توپ های آبی زوج است. حداقل چه تعداد توپ درون سبد است؟

پرسش ۵

n کلاه از 1 تا n شماره گذاری شده اند. کلاه ها را به صورت کاملاً تصادفی میان n نفر که از 1 تا n شماره گذاری
 شده اند، پخش می کنیم. به ازای n های بزرگ احتمال آن که هیچ کسی کلاه متناظر با شماره خودش را دریافت نکند،
 چقدر است؟

پرسش ۶

فرض کنید به ازای هر $q \in \mathbb{N}$ ، $G(q)$ یک زیرمجموعه دلخواه q عضوی از مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, 2q\}$ باشد.
 همین طور فرض کنید $m \in \{1, 2, \dots, q\}$ باشد. احتمال این که عضوی به تصادف از $G(q)$ انتخاب شود و $y + m$
 (جمع به پیمانه $2q + 1$) عضو $G(q)$ نباشد $\Pr(y + m \notin G(q))$ می نامیم. نشان دهید:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\max_{1 \leq m \leq q} \Pr(y + m \notin G(q))) \neq 0$$

در مورد این سوال می توانید با سایر دوستانتان مشورت کنید، اما ننگارش پاسخ باید کاملاً از خودتان باشد و نام
 افرادی که با آن ها مشورت کرده اید را ذکر کنید.

آیا می توانید پرسش را در حالت کلی تر مطرح و بررسی کنید؟ (اختیاری بدون نمره)

پرسش ۷

از بین همه‌ی پاسخ‌های صحیح نامنفی معادله زیر، یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

احتمال این که حداقل r تا از x_i ها مثبت باشند، چقدر است؟ ($1 \leq r \leq k$)
احتمال این که همه‌ی x_i ها حداکثر t باشند، چقدر است؟