



دانشکده‌ی علوم ریاضی



احتمال و کاربرد آن

آزمون میانترم

تاریخ: ۱۴۰۰/۲/۹

مدیران: سحر قاجار، شهرام خزائی

پاسخ نهایی هر سوال را تا حد امکان ساده کنید و به ساده‌ترین صورت بنویسید

۱. زمان آزمون ۲:۴۵ است.
۲. نیاز است از ساعت ۱۸:۰۰ - ۱۹:۰۰ از طریق اسکایپ جهت مصاحبه شفاهی در دسترس باشید.
۳. در صورتی که شناسه اسکایپ خود را هنوز ارسال نکرده‌اید، آن را به همراه اسم و شماره دانشجویی از طریق تلگرام Elahe_Sadeghi99 یا ایمیل sadeghi.elahe99@gmail.com برای خانم الهه صادقی ارسال کنید.
۴. آزمون کتاب و جزوه بسته است و استفاده از اینترنت و هیچ منبعی مجاز نیست.
۵. صحبت و مشورت با هیچ شخصی تا پایان ساعت ۱۹:۰۰ مجاز نیست.
۶. پاسخ سوالها را باید قبل از ساعت ۱۸:۰۰ در درس افزار آپلود کنید.
۷. عواقب آپلود با تأخیر بر عهده دانشجویست. بنابراین پیشنهاد می‌شود پاسخها را رأس ساعت ۱۷:۴۵ آپلود کنید.
۸. ضروری است که پاسخها باید با کیفیت مناسبی اسکن شوند.

پاسخ نهایی هر سوال را تا حد امکان ساده کنید و به ساده‌ترین صورت بنویسید

۱. (۶ نمره)

یک جایگشت x_1, x_2, \dots, x_{2n} از $1, 2, \dots, 2n$ را به طور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه برای هر $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$ داشته باشیم $x_i + x_{i+1} \neq 2n + 1$ چقدر است؟

۲. (۶ نمره)

یک گروه n نفره از شکارچیان زبردست به طور کاملاً تصادفی به سمت n خرگوش در آن واحد شلیک می‌کنند. اگر هر خرگوشی که توسط حداقل یک شکارچی مورد هدف قرار گرفته باشد زنده نماند، به طور متوسط چند خرگوش نجات پیدا می‌کنند؟

۳. (۶ نمره)

فرض کنید روز قبل از امتحان هر دانشجو در کلاس حل تمرین سوالی را می‌پرسد که با احتمال p در امتحان می‌آید. تعداد دانشجویانی که در آن روز در کلاس حاضر می‌شوند توزیع پواسون با میانگین λ دارد. احتمال آنکه دستیار آموزشی درس، مجبور به حل هیچ سوالی از امتحان نباشد را محاسبه کنید.

۴. (۶ نمره)

تاسی را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا ۶ بیاید. اگر متغیر تصادفی Y بیانگر تعداد پرتاب‌ها، و متغیر تصادفی X تعداد یک‌های مشاهده شده باشد، ابتدا مقدار $E[X|Y = y]$ را محاسبه کنید. سپس با استفاده از رابطه امیدریاضی شرطی، مقدار $E[X]$ را محاسبه کنید.

۵. (۶ نمره)

فرض کنید یک کیسه حاوی N توپ داریم که m تای آنها آبی و بقیه قرمز است. بدون جایگذاری، n توپ را به طور کاملاً تصادفی و به ترتیب از کیسه برمی‌داریم. فرض کنید برای $i = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی X_i یک باشد اگر توپ i ام خارج شده آبی باشد، و در غیر اینصورت صفر باشد. نشان دهید که X_i یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت $\frac{m}{N}$ است. سپس با استدلال مناسب مقدار متوسط تعداد توپ‌های آبی خارج شده را محاسبه کنید.

۶. (۴ نمره)

فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و یکنواخت روی مجموعه $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ باشند. مقادیر زیر را حساب کنید:

$$\bullet E[X|X + Y^2 = 5]$$

$$\bullet E[XY|X + Y^2 = 5]$$