دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربردها ۲۲ فروردین ۱۴۰۰

تمرین : سری ۳

مدرّسین : دکتر شهرام خزائی و دکتر سحر قاجار *مهلت تحویل ۸ اردیبهشت*

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها دو مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از LaTeX، ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه دارد.
- نوشتن حداقل دو سری از تمرینات با استفاده از LaTeXالزامی می‌باشد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست .
- ارسال‌های پس از موعد(حداکثر یک هفته)، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با `rafiei.mahdi98@gmail.com` و `mona.mohammadi78@gmail.com` مطرح نمایید.

مسأله‌ی ۱

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی دوجمله‌ای مستقل به ترتیب با پارامترهای (n, p) و (m, q) باشند. یک متغیر تصادفی جدید به شکل $Z = X + Y$ تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم تابع جرم احتمال متغیر تصادفی Z را بیابیم؛
آ) ابتدا فرض کنید $p = q$. یک روش برای حل این مسئله شرطی کردن و استفاده از قانون احتمال کل است. برای این کار باید احتمال زیر را با استفاده از قانون احتمال کل بیابیم:

$$P_Z(k) = \Pr[Z = k] = \Pr[X + Y = k]$$

مساله را با این روش حل کنید.
ب) اگر $p \neq q$ باشد، در چه صورتی Z دارای توزیع دو جمله‌ای است؟
پ) ثابت کنید اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و به ازای هر $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ متغیر تصادفی X_i یک متغیر تصادفی برنولی با پارامتر p باشد، آنگاه متغیر تصادفی X که به صورت $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ تعریف می‌شود، دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای (n, p) خواهد بود.
ت) با استفاده از قسمت (پ) حکم قسمت (آ) را دوباره اثبات کنید.

مسأله‌ی ۲

کارخانه‌ای را در نظر بگیرید که به احتمال 0.01 محصول خراب تولید می‌کند. احتمال این که در نمونه‌ای ۳۰۰ تایی از محصولات این کارخانه، دقیقا ۵ محصول خراب داشته باشیم، دقیقا چقدر است؟ تخمینی با استفاده از توزیع پواسون نیز ارائه دهید و با مقدار اصلی مقایسه کنید.

مسأله‌ی ۳

از یک چهارراه در ساعت به طور متوسط ۳۰۰ ماشین عبور می‌کند.
آ) احتمال این که در یک دقیقه خاص هیچ ماشینی از چهارراه عبور نکند چقدر است؟
ب) امید ریاضی تعداد ماشین‌هایی که از چهارراه در دو دقیقه عبور می‌کنند چقدر است؟
پ) احتمال این که دقیقا همین تعداد ماشین (جواب قسمت قبل) در دو دقیقه از چهارراه عبور کنند چقدر است؟

مسأله‌ی ۴

پمپ بنزینی دارای یک جایگاه برای بنزین زدن می‌باشد. ماشین‌ها در سه صفِ کنارهم برای بنزین زدن توقف کرده‌اند. هربار که یک ماشین بنزین می‌زند و جایگاه خالی می‌شود، متصدی پمپ بنزین به صورت تصادفی یکی از سه ماشین سرصف‌ها را برای ورود به جایگاه انتخاب می‌کند. در ابتدا ماشین علی، دهمین ماشین در صف اول می‌باشد. اگر ماشین علی X اُمین ماشینی باشد که وارد جایگاه می‌شود، امید ریاضی و واریانس X را محاسبه کنید. (فرض کنید صف ها طول نامتناهی دارند.)

مسأله‌ی ۵

به یاد آورید که اگر $(\Omega, \Pr)$ یک فضای احتمال باشد و $E \subseteq \Omega$، به طوری که $\Pr(E) > 0$، آنگاه $(\Omega, \Pr(.|E))$ نیز یک فضای احتمال است. اگر X یک متغیر تصادفی باشد، می‌توان امید ریاضی آن را در فضای احتمال شرطی با نماد $E[X|E]$ نشان داد.

آ) ثابت کنید

$$E[X] = E[X|E]\Pr(E) + E[X|E^c]\Pr(E^c)$$

ب) با استفاده از حکم بالا، امید ریاضی یک متغیر هندسی با پارامتر p را حساب کنید.

مسأله‌ی ۶

می‌خواهیم با استفاده از سکه‌ای ناعادل که با احتمال p شیر می‌آید، سکه‌ای عادل بسازیم. دو بار این سکه ناعادل را پرتاب می‌کنیم. اگر نتیجه دو پرتاب نابرابر بود، پرتاب دوم را به عنوان خروجی سکه عادل اعلام می‌کنیم. اگر هر دو پرتاب نتیجه برابر داشتند، دوباره سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم و فرایند را تکرار می‌کنیم.

آ) ثابت کنید که سکه ساخته شده عادل است.

ب) به طور میانگین، برای هر خروجی سکه عادل، به چند پرتاب سکه ناعادل احتیاج داریم؟

پ) اگر بدانیم که $p = \frac{2}{3}$، آیا می‌توان این میانگین را کاهش داد؟

ت) دوباره فرض کنید که p ناشناخته است. فرض کنید که دو پرتاب اول شیر، و دو پرتاب دوم خط آمده است. در این صورت نیز خروجی را خط اعلام می‌کنیم و حالت متقارن آن را شیر. اگر هر چهار پرتاب نتیجه یکسان داشتند، فرایند را دوباره تکرار می‌کنیم. میانگین تعداد پرتاب سکه ناعادل را برای هر خروجی سکه عادل حساب کنید. دقت کنید که ممکن است پس از دو پرتاب نتیجه سکه مشخص شود.

ث) (امتیازی) ایده قسمت قبل را تعمیم دهید، به صورتی که برای هر k اگر 2^k پرتاب شیر و 2^k پرتاب خط داشتیم، نتیجه را خط اعلام کنیم و برعکس. در این حالت میانگین تعداد پرتاب سکه ناعادل چقدر است؟

مسأله‌ی ۷

فرض کنید X متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت روی $\{1, \ldots, 6\}$ باشد، و Y متغیری برنولی با پارامتر $\frac{1}{2}$ و مستقل از X باشد. توزیع توام $X+Y$ و $X-Y$ را به دست آورید و از روی آن توزیع‌های حاشیه‌ای را محاسبه کنید. آیا این دو متغیر مستقل هستند؟

مسأله‌ی ۸

فرض کنید X و Y دو متغیر مستقل پواسون با پارامترهای a و b باشند.

آ) توزیع $X+Y$ را به دست آورید.

ب) توزیع متغیر X به شرط $X+Y=n$ را به دست آورید.

پ) توزیع $X-Y$ را به دست آورید.

ت) توزیع متغیر X به شرط $X - Y = n$ را به دست آورید.
راهنمایی: جواب نهایی قسمت (پ) به صورت زیر است:

$$\Pr[X - Y = n] = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}} I_{|n|}(2\sqrt{ab})$$

که در آن $I_n(x)$ تابع تعمیم یافته بسل است که برای مقادیل صحیح نامنفی n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

مسأله‌ی ۹

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی هندسی مستقل با پارامترهای p و q هستند. نشان دهید متغیر $\min(X, Y)$ یک متغیر هندسی و با پارامتر $1 - (1-p)(1-q)$ است.
راهنمایی: احتمال $\Pr[\min(X, Y) > k]$ را حساب کنید و با احتمال $\Pr[X > k]$ مقایسه کنید.