قسمت دوم جزوهٔ درس ریاضی مهندسی

(توابع مختلط)

نیم‌سال اوّل ۱۴۰۰

فهرست مطالب

توضیحات در مورد این جزوه

مطالب این جزوه از روی کتاب [۱] آماده شده است.

مطالبی که در قسمت دوم درس ریاضی مهندسی (توابع مختلط) تدریس خواهد شد، عبارت‌اند از:

- بخش‌های ۱.۱، ۲.۱ و ۳.۱ از فصل ۱ این جزوه.
- بخش‌های ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲ از فصل ۲ این جزوه.
- بخش‌های ۱.۳، ۲.۳ و ۳.۳ از فصل ۳ این جزوه.

فصل ۱

توابع تحلیلی

هدف از این فصل معرفی توابع مختلط و در نهایت تابع تحلیلی است که می‌توان گفت کامل‌ترین توابع از نظر خواص و بهترین ابزار برای محاسبه انتگرال‌های پیچیده و تبدیل میدان‌های «بد» به میدان‌های «خوب» است به‌طوری‌که انجام عملیات ریاضی مطلوب در میدان دوم مقدور و قابل انتقال به میدان اوّل باشد. توابع مختلط توابعی با دامنه و برد اعداد مختلط هستند. تابع تحلیلی هم یعنی تابع مشتق‌پذیر. با توجه به این نکات در بخش ۱.۱ به معرفی اعداد مختلط و خواص آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۱ توابع تحلیلی و در بخش ۳.۱ نیز توابع مقدماتی را داریم. در فصل بعدی بعد از معرفی انتگرال مختلط و خواص اساسی آن کاربرد آن را در محاسبات انتگرال حقیقی خواهیم داشت. در فصل آخر هم بعد از معرفی توابع همدیس و خواص اساسی آن، کاربرد آن را در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خواهیم دید.

۱.۱ اعداد مختلط

در این بخش به یادآوری اعداد مختلط و خواص اساسی آن می‌پردازیم. روی مجموعه نقاط صفحه که آن را با $\mathbb{R}^۲$ نشان می‌دهیم یعنی نقاط به‌صورت زوج مرتب (x,y) یک عمل جمع و یک عمل ضرب اسکالر تعریف شده است و آن را تبدیل به فضای برداری می‌کند. این فضای برداری برای انجام چهار عمل اصلی مناسب نیست. چون فاقد ضرب و تقسیم است. با تعریف یک عمل ضرب روی آن و معرفی تقسیم آن را تبدیل به دستگاه اعداد مختلط می‌کنیم که انجام چهار عمل اصلی در آن مقدور می‌گردد.

روی $\mathbb{R}^۲$ مجموعه نقاط صفحه دو عمل جمع و ضرب به‌صورت زیر اعمال می‌کنیم و آن را مجوعه

اعداد مختلط یا دستگاه اعداد مختلط می‌گوییم و با $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. برای دو نقطه (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در صفحه تعریف می‌کنیم.

الف) عمل جمع:

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

توجه کنید این عمل جمع همان جمع بردارها در صفحه است.

ب) عمل ضرب:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

با توجه به این دو عمل مفاهیم و خواصی از اعداد مختلط را به‌صورت زیر داریم.

۱. دو عدد مختلط (x_1,y_1) و (x_2,y_2) با هم برابراند اگر $x_1=x_2$ و $y_1=y_2$.

۲. عدد مختلط $(0,0)$ را عضو خنثی گوییم و با 0 نشان می‌دهیم چون

$$(x,y)+(0,0)=(x,y)$$

۳. عدد مختلط $(-x,-y)$ را قرینه عدد مختلط (x,y) گوییم و با $-(x,y)$ نشان می‌دهیم. چون

$$(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$$

۴. عدد مختلط $(1,0)$ را واحد می‌نامیم و با ۱ نشان می‌دهیم چون

$$(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$$

۵. عدد مختلط $(0,1)$ را واحد موهومی می‌گوییم و با i نشان می‌دهیم.

۶. اگر عدد مختلط $(x,0)$ را با عدد حقیقی x یکسان بگیریم در این‌صورت

$$(x,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

این نمایش نقاط صفحه را نمایش مختلط آن یا نمایش مختلط اعداد مختلط گوییم.

نکته. توجه کنید $i^{2} = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$. به‌این‌دلیل است که i را ریشه دوم عدد -1 حقیقی می‌دانند.

برای سادگی اعداد مختلط را معمولاً با z یا w نشان می‌دهیم.

۷. عدد حقیقی x را قسمت حقیقی و عدد حقیقی y را قسمت موهومی عدد مختلط $z = x + iy$ گویند و با $x = \Re z$ و $y = \Im z$ نشان می‌دهند.

۸. عدد مختلط w را معکوس عدد مختلط z می‌گوییم و با $\frac{1}{z}$ نشان می‌دهیم اگر $z \cdot w = 1$. پس اگر $z = (x, y)$ و $w = (u, v)$ باشد در این‌صورت داریم:

$$(u, v)(x, y) = (ux - vy, uy + xv) = (1, 0)$$

پس باید $ux - vy = 1$ و $uy + xv = 0$. از حل این دو معادله برای u و v بر حسب x و y به‌دست می‌آوریم:

$$u = \frac{x}{x^{2} + y^{2}} \quad , \quad v = -\frac{y}{x^{2} + y^{2}}.$$

نکته. عدد خنثی $(0, 0)$ فاقد معکوس و سایر اعداد مختلط دارای معکوس هستند.

۹. عمل تفریق دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را به‌صورت زیر می‌گیریم.

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

۱۰. عمل تقسیم دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را برای $z_2 \neq 0$ به‌صورت زیر می‌گیریم.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{2} + y_2^{2}} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^{2} + y_2^{2}}.$$

۱۱. عدد مختلط $x - iy$ را مزدوج عدد مختلط $z = x + iy$ گویند و با $\bar{z}$ نشان می‌دهند.

تذکر. برای انجام محاسبات چهار عمل اصلی برای اعداد مختلط با نمایش مختلط یعنی $z = x + iy$ که از این به بعد فقط از این نمایش اعداد مختلط استفاده خواهیم کرد، بایستی عدد i را مانند یک پارامتر حقیقی منظور و محاسبات را مانند اعداد حقیقی انجام دهیم و i^{2} را با -1 جایگزین کنیم. برای رفع i از مخرج کسر از عدد مزدوج استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۱. عدد مختلط زیر را به‌فرم $a+ib$ بنویسید.

$$\frac{(1+i)^2-2-i}{(1-i)^3}$$

حل. ابتدا صورت و مخرج را ساده می‌کنیم.

$$\frac{(1+i)^2-2-i}{(1-i)^3}=\frac{1+2i+i^2-2-i}{1-3i+3i^2-i^3}=\frac{-2+i}{-2-2i}=\frac{(2-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$$
$$=\frac{4-2i-4i+2i^2}{4+4}=\frac{2-6i}{8}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$$

تذکر. ۱) نظر به این‌که اعداد مختلط به‌صورت $z=x=(x,0)$ روی محور حقیقی قرار دارد از این نظر مجموعه اعداد حقیقی را زیر مجموعه اعداد مختلط می‌دانند.

۲) رابطه ترتیب اعداد حقیقی که روی محور حقیقی صفحه اعداد مختلط قابل تصور است به مجموعه اعداد مختلط قابل تعمیم نیست. چون i را با 0 نمی‌توان مقایسه نمود. چون اگر بگیریم $i>0$ در این‌صورت می‌بایستی داشته باشیم:

$$i\cdot i>0 \quad\Longrightarrow\quad i^2=-1>0 \quad\Longrightarrow\quad (-1)\cdot i>0 \quad\Longrightarrow\quad -i>0$$

در صورتی‌که از دو عدد حقیقی غیر صفر اگر عددی بزرگتر از صفر باشد قرینه آن باید کمتر از صفر باشد. برای رفع این کمبود برای نمایش نامساوی‌ها و نامعادلات از قدر مطلق اعداد مختلط یا قسمت حقیقی و قسمت موهومی این اعداد و رابطه ترتیبی اعداد حقیقی استفاده خواهیم کرد.

۱۲. خواص مزدوج:

$$\bar{\bar{z}}=z \quad,\quad \Re z=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad,\quad \Im z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$
$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2 \quad,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2 \quad,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

۱۳. قدر مطلق عدد مختلط z را که با $|z|$ نشان می‌دهیم عدد حقیقی $\sqrt{x^2+y^2}$ است.

۱۴. خواص قدر مطلق:

$$|\bar{z}|=|z| \quad,\quad z\bar{z}=|z|^2$$
$$\Re z\le|\Re z|\le|z| \quad,\quad \Im z\le|\Im z|\le|z|$$
$$|z|\le|\Re z|+|\Im z| \quad,\quad |z_1z_2|=|z_1||z_2| \quad,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

۱۵. نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی: نمایش اعداد مختلط با استفاده از مختصات قطبی کارهای توانی اعداد مختلط را ساده می‌کند. در این مختصات داریم:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \quad , \quad r^۲=x^۲+y^۲ \quad , \quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

پس

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

۱۶. عدد θ را شناسه یا آوند عدد مختلط z گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند.

برای هر عدد مختلط بینهایت آوند موجود است. اگر $-\pi<\theta\leq\pi$ باشد آن را آوند اصلی گویند و با $\operatorname{Arg} z$ نشان می‌دهند.

مثال ۲.۱. آوند اصلی عدد مختلط $z=۱-i$ و سایر آوندهای آن را به‌دست آورید. همچنین این عدد را در مختصات قطبی نشان دهید.

حل. داریم $r^۲=۱^۲+۱^۲$ پس $r=\sqrt{۲}$ و $x=۱$ و $y=-۱$. پس $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$ و $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$. پس $\operatorname{Arg} z=-\frac{\pi}{۴}$ و مجموعه کلیه آوندها عبارتست از:

$$\left\{\theta\,:\,\theta=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}, k=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots\right\}.$$

پس در مختصات قطبی این عدد می‌شود:

$$z=\sqrt{۲}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{۴}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right)\right).$$

یک نتیجه بسیار مهم نمایش اعداد مختلط در مختصات قطبی خاصیت زیر است که محاسبات توانی را ساده می‌سازد.

خاصیت ۱.۱ (فرمول دوموآور). به‌ازای هر عدد صحیح n تساوی زیر برقرار است.

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

علت. (با استقرا) برای $n=1$ برقرار است. اگر برای $n \geq 1$ برقرار باشد در این‌صورت

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) + i(\cos n\theta\sin\theta + \sin n\theta\cos\theta) \\
&= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta.
\end{aligned}$$

چون

$$\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

پس برای nهای منفی و صفر هم برقرار است.

مثال ۱.۳. مقدار $(1-i)^{200}$ را بیابید.

حل. داریم $x=1$ و $y=-1$ و $r=\sqrt{2}$ و $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. پس $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
به‌این‌ترتیب

$$\begin{aligned}
(1+i)^{200} &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{200} \\
&= 2^{100}\Big(\cos(-50\pi) + i\sin(-50\pi)\Big) = 2^{100}\cdot 1 = 2^{100}
\end{aligned}$$

نمای موهومی: عدد مختلط $\cos\theta + i\sin\theta$ را نمای موهومی گوییم و با $e^{i\theta}$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

تذکر. نمای موهومی $e^{i\theta}$ کلیه خواص جبری e^x را دارد. به‌این‌دلیل نام نمایی را برای آن انتخاب کردیم.
یعنی داریم:

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \quad , \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

یک استفاده خوب از نمایش قطبی اعداد مختلط محاسبه ریشه nام اعداد مختلط است.

ریشه nام: عدد مختلط w را ریشه nام عدد مختلط z گوییم اگر $w^n = z$ و می‌نویسیم $w = \sqrt[n]{z}$.

خاصیت ۲.۱. هر عدد مختلط غیر صفر مانند z دارای n ریشه متمایز nام است. اگر $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ باشد آن‌گاه این n ریشه عبارتند از

$$w_k=r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{2k\pi+\theta}{n})},\qquad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

علت. ریشه nام z یعنی $w=\rho e^{i\phi}$ را باید طوری در نظر بگیرید که داشته باشیم:

$$w^n=\rho^n e^{in\phi}=\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

پس باید

$$\rho^n=r\quad,\quad\cos n\phi=\cos\theta\quad,\quad\sin n\phi=\sin\theta.$$

به‌این‌ترتیب

$$\rho=\sqrt[n]{r}\quad,\quad n\phi=2k\pi+\theta,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

در نتیجه

$$w=r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right]$$

که برای $k=0,1,2,\cdots,n-1$، n مقدار متمایز به‌دست می‌آید و برای سایر مقادیر k این مقادیر تکرار می‌شود.

مثال ۴.۱. ریشه‌های چهارم عدد -1 را بیابید.

حل. داریم $-1=\cos\pi+i\sin\pi$. پس $r=1$ و $\theta=\pi$. در نتیجه

$$w_k=\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

پس

$$w_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_3=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_4=\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

تذکر. می‌دانیم مقصود از ریشه nام یک عدد حقیقی و مثبت فقط ریشه nام مثبت آن است. لیکن مقصود از ریشه nام یک عدد مختلط هر یک از ریشه‌های nام آن ممکن است باشد.

تمرین ۱.۱

۱. قسمت حقیق و موهومی و قدر مطلق و مزدوج هر یک از اعداد زیر را بیابید.

آ) $\frac{۵+۳i}{۱+۵i}$ ج) $\frac{۱}{۵z+۱-i}$ ه) $\frac{۲+i}{۳+۲i}$

ب) $(۱+i\sqrt{۳})^{۸}$ د) $\frac{(۱-i)^{۳}}{۳+i}$ و) $(۱+i)^{n}+(۱-i)^{n}$

۲. اعداد مختلط زیر را به‌صورت $a+ib$ بنویسید.

آ) $(۵+۲i)(۲-۳i)$ ب) $\frac{۲-۳i}{۴-i}$ ج) $(۶+۸i)^{۳}$

۳. هر یک از اعداد زیر را در مختصات قطبی بنویسید.

آ) $۳+۳i$ ب) $\frac{۱}{۴+۳i}$ ج) $\frac{(۱+i)^{۶}}{(\sqrt{۳}-i)^{۴}}$

۴. معادلات زیر را حل کنید.

آ) $(x,y)^{۲}-(x,y)+(۱,۰)=۰$ ب) $z^{۲}-۴iz+۵=۰$

۵. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

آ) $$\begin{aligned} x^{۲}-y^{۲}&=۱\\ xy&=۲ \end{aligned}$$

ب) $$\begin{aligned} x^{۳}-۳xy^{۲}&=۱\\ ۳x^{۲}y-y^{۳}&=\sqrt{۳} \end{aligned}$$

۶. مقادیر زیر را ساده کنید.

آ) $(1+i\sqrt{3})^{10}$ ج) $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ه) $\sqrt{1-\sqrt{i}}$

ب) $(1-i)^{50}$ د) $\sqrt[4]{1+i}$ و) $\sqrt[4]{-i}$

۷. مجموعه نقاط زیر را بر حسب x و y بنویسید و در صفحه مشخص کنید.

آ) $|z-1|<1$ ج) $\operatorname{Arg}\frac{z-i}{z+i}=\frac{\pi}{5}$ ه) $\Im\frac{1}{z}<1$

ب) $|z+i|+|z-i|=1$ د) $\Re z^2>1$ و) $\Im z^2+\Re\frac{z+1}{z-1}<0$

۲.۱ توابع تحلیلی

در این بخش بعد از معرفی تابع مختلط به بیان حد، پیوستگی و مشتق توابع مختلط و سرانجام به تابع تحلیلی می‌پردازیم. خواهیم دید عمده مطالب این بخش مشابه توابع حقیقی است.

تابع مختلط: هر تابع با دامنه و برد اعداد مختلط را یک تابع مختلط گویند.

مثال ۵.۱. هر یک از توابع زیر یک تابع مختلط است.

آ) $f(z)=z^3-iz^2+z+2-i$ ب) $g(z)=e^x\cos 3y+ie^{2x}\sin y$

تذکر. اگر تابع $f(z)$ بر حسب z داده شده باشد آن را بر حسب x و y می‌توان نوشت، یعنی $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. بر عکس هر تابع مختلط که به این‌صورت داده شده باشد را بر حسب z می‌توان نوشت. در این حالت اوّل z را با $x+iy$ جایگزین کنید و در حالت دوم x و y را به‌ترتیب با $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ جایگزین کنید.

مثال ۶.۱. تابع $f(z)=z^3$ را بر حسب x و y بنویسید و ساده کنید.

$$f(z)=z^3=(x+iy)^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3).$$

مثال ۷.۱. تابع $f(z)=x^2-y^2+2xyi$ را بر حسب z بنویسید.

$$\begin{aligned}f(z)=x^2-y^2+2xyi&=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2-\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)i\\&=\frac{z^2}{4}+z\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2}{4}-z\bar{z}+\frac{\bar{z}^2}{4}+\frac{z^2}{2}-\frac{\bar{z}^2}{2}=z^2.\end{aligned}$$

تذکر. معمولاً نیاز است تا تابع بر حسب z را بر حسب x و y بنویسیم.

چندجمله‌ای: تابع $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$ را که در آن n عدد طبیعی و $a_n\neq 0$ و a_1 تا a_n اعداد مختلط اند را یک چندجمله‌ای مختلط از درجه n گویند.

تابع کسری: اگر $p(z)$ و $q(z)$ دو چندجمله باشد تابع $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ را یک تابع کسری یا یک تابع منطق گویند.

حال به بیان مفهوم حد و پیوستگی و در انتهای این بخش به بیان مشتق تابع تحلیلی می‌پردازیم.

فرض کنید $f(z)$ تابعی مختلط باشد که روی دیسک $|z-z_0|<R$ مگر در نقطه z_0 تعریف شده باشد.

حد تابع: می‌گوییم حد این تابع در z_0 برابر w_0 است و می‌نویسیم $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ اگر حد تابع دو متغیر حقیقی $|f(z)-w_0|$ در نقطه $z_0=(x_0,y_0)$ برابر با صفر باشد.

تذکر. اگر $z=x+iy$ و $z_0=x_0+iy_0$ و $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $w_0=u_0+iv_0$ باشد در این‌صورت $|z-z_0|<R$ معادل با

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$$

و

$$|f(z)-w_0|^2=\Big(u(x,y)-u_0\Big)^2+\Big(v(x,y)-v_0\Big)^2.$$

پس $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ اگر و فقط اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[\Big(u(x,y)-u_0\Big)^2+\Big(v(x,y)-v_0\Big)^2\right]=0.$$

خاصیت ۱.۳. با توجه به نمادهای فوق $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ اگر و فقط اگر $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$ و $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$.

علت. (اگر) از نامساوی زیر نتیجه می‌شود که به‌دلیل نامساوی مثلث برقرار است.

$$|f(z)-w_0|\leq|u(x,y)-u_0|+|v(x,y)-v_0|$$

حال اگر $z \to z_0$ در این‌صورت $(x,y) \to (x_0,y_0)$ و در نتیجه طرف دوم نامساوی به صفر میل می‌کند. پس $\lim_{z\to z_0} |f(z)-w_0| = 0$.

(فقط اگر) از نامساوی‌های زیر نتیجه می‌شود.

$$|u(x,y)-u_0| \leq |f(z)-w_0| \quad , \quad |v(x,y)-v_0| \leq |f(z)-w_0|.$$

حال اگر $\lim_{z\to z_0} |f(z)-w_0| = 0$ در این‌صورت $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ و $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$.

تذکر. با توجه به مطالب فوق کلیه قواعد و فرمول‌های حد برای توابع حقیقی برای تابع مختلط هم برقرار است.

مثلاً اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ و $\lim_{z\to z_0} g(z) = w_0' \neq 0$ باشد آن‌گاه $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_0'}$.

پیوستگی تابع: می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 پیوسته است اگر $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. همچنین می‌گوییم $f(z)$ پیوسته است اگر در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

تذکر. با توجه به خاصیت فوق کلیه قواعد و خواص پیوستگی توابع حقیقی برای توابع مختلط هم برقرار است. توجه کنید $u(x,y)$ و $v(x,y)$ توابع حقیقی‌اند که معمولاً از توابع مقدماتی حقیقی تشکیل می‌شوند. پس تشخیص پیوستگی آنها بسیار آسان است.

مثلاً ترکیب دو تابع پیوسته یا حاصلضرب آنها یا حاصل تقسیم آنها پیوسته است. یا از خواص مشابه آنها می‌توان برای پیوستگی استفاده کرد.

حال به بیان مفهوم مشتق و خواص آن می‌پردازیم. تا به‌حال توابع مورد بحث از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$ بود. یعنی $(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$. به‌این‌دلیل توانستیم کلیه مطالب مربوط به حد و پیوستگی را به توابع دو متغیره ربط دهیم و از خواص آنها استفاده کنیم. با وارد شدن به مباحث مشتق این‌کار دیگر امکان‌پذیر نیست و می‌بایستی ابزارهای جدیدی را بسازیم.

فرض کنید z_0 در دامنه f قرار دارد و برای $r > 0$ کوچک $|z-z_0| < r$ در دامنه f قرار دارد. مشتق f را در z_0 که با $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

اگر این حد موجود نباشد می‌گوییم f در z_0 فاقد مشتق است.

می‌گوییم f مشتق‌پذیر است اگر در تمام نقاط دامنه‌اش دارای مشتق باشد.

مثال ۸.۱. مشتق تابع $f(z)=z^۲$ را بیابید.

$$f'(z_۰)=\lim_{z\to z_۰}\frac{z^۲-z_۰^۲}{z-z_۰}=\lim_{z\to z_۰}(z+z_۰)=۲z_۰$$

مثال ۹.۱. تابع $f(z)=\overline{z}$ در همه‌جا پیوسته و در هیچ‌جا مشتق ندارد زیرا مشتق در صورت وجود با حد زیر داده می‌شود.

$$\lim_{z\to z_۰}\frac{\overline{z}-\overline{z}_۰}{z-z_۰}=\lim_{(x,y)\to(x_۰,y_۰)}\frac{(x-x_۰)-i(y-y_۰)}{(x-x_۰)+i(y-y_۰)}$$

حال اگر بگیریم $y=y_۰$ و $x\to x_۰$ مقدار حد برابر ۱ می‌شود. بار دیگر اگر بگیریم $x=x_۰$ و $y\to y_۰$ مقدار حد برابر ۱− به‌دست می‌آید که متفاوت است.

تذکر. مشتق مرتبه بالاتر مشابه تابع یک متغیر حقیقی است.

تذکر. کلیه قواعد، فرمول‌ها و خواص مشتق تابع حقیقی $y=f(x)$ برای تابع مختلط مشتق‌پذیر $w=f(z)$ به همان صورت برقرار است. مثلاً قاعده زنجیره‌ای مشتق یا مشتق حاصلضرب یا مشتق حاصل تقسیم و حتی قواعد هوپیتال در حدگیری به همان صورت برقرار است. علت کاملاً مشابه حقیقی است فقط کافیست x به z و y به w تبدیل گردد.

مثال ۱۰.۱. مشتق تابع $f(z)=(۱+z+iz^۲)^۵$ می‌شود:

$$f'(z)=۵(۱+۲iz)(۱+z+iz^۲)^۴.$$

همچنین

$$\lim_{z\to ۲}\frac{z^۳-۸}{z^۲-۵z+۶}\overset{\mathrm{H}}{=}\lim_{z\to ۲}\frac{۳z^۲}{۲z-۵}=\frac{۱۲}{۴-۵}=-۱۲.$$

حال سوال این است که مشتق توابع به‌صورت $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را چگونه به‌دست آوریم. به‌عنوان مثال برای $f(z)=e^{۲x}(\cos ۲y+i\sin ۲y)$، $f'(z)$ چگونه قابل حصول است. اگرچه آن را می‌توان به‌صورت

$$f(z)=e^{z+\overline{z}}(\cos i(\overline{z}-z)+i\sin i(\overline{z}-z))$$

نوشت. لیکن هنوز توابع کسینوس و سینوس یا نمائی برای اعداد مختلط برای ما دارای معنی نمی‌باشد. از این‌جا به‌بعد مطالب نو می‌آید که با ریاضیات قبلی چندان تطابق ندارد. آن را در ادامه این بخش داریم.

فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_\circ=x_\circ+iy_\circ$ دارای مشتق $f'(z_\circ)$ باشد. در این‌صورت حدهای زیر موجود است.

$$\begin{aligned}
f'(z_\circ) &= \lim_{\Delta z\to\circ}\frac{f(z_\circ+\Delta z)-f(z_\circ)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta x+i\Delta y\to\circ}\frac{u(x_\circ+\Delta x,y_\circ+\Delta y)-u(x_\circ,y_\circ)+i[v(x_\circ+\Delta x,y_\circ+\Delta y)-v(x_\circ,y_\circ)]}{\Delta x+i\Delta y}\\
&= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\circ,\circ)}\frac{u(x_\circ+\Delta x,y_\circ+\Delta y)-u(x_\circ,y_\circ)}{\Delta x+i\Delta y}\\
&\quad + i\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(\circ,\circ)}\frac{v(x_\circ+\Delta x,y_\circ+\Delta y)-v(x_\circ,y_\circ)}{\Delta x+i\Delta y}
\end{aligned}$$

حال بگیرید $\Delta y=\circ$ و $\Delta x\to\circ$ در این‌صورت چون این حدها موجوداند:

$$\begin{aligned}
f'(z_\circ) &= \lim_{\Delta x\to\circ}\frac{u(x_\circ+\Delta x,y_\circ)-u(x_\circ,y_\circ)}{\Delta x}\\
&\quad + i\lim_{\Delta x\to\circ}\frac{v(x_\circ+\Delta x,y_\circ)-v(x_\circ,y_\circ)}{\Delta x}\\
&= u_x(x_\circ,y_\circ)+iv_x(x_\circ,y_\circ)
\end{aligned}$$

بار دیگر بگیرید $\Delta x=\circ$ و $\Delta y\to\circ$ در این‌صورت

$$\begin{aligned}
f'(z_\circ) &= \lim_{\Delta y\to\circ}\frac{u(x_\circ,y_\circ+\Delta y)-u(x_\circ,y_\circ)}{i\Delta y}\\
&\quad + i\lim_{\Delta y\to\circ}\frac{v(x_\circ,y_\circ+\Delta y)-v(x_\circ,y_\circ)}{i\Delta y}\\
&= -iu_y(x_\circ,y_\circ)+v_y(x_\circ,y_\circ)
\end{aligned}$$

چون حد یگانه است، پس خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۴.۱ (شرط لازم کشی-ریمان). فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_\circ=x_\circ+iy_\circ$ مشتق‌پذیر است. در این‌صورت کلیه مشتقات پاره‌ای مرتبه اوّل u و v نسبت به x و y در نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ موجود است و

$$\begin{cases}
u_x(x_\circ,y_\circ)=v_y(x_\circ,y_\circ)\\
u_y(x_\circ,y_\circ)=-v_x(x_\circ,y_\circ)
\end{cases}$$

به‌علاوه

$$f'(z_\circ)=u_x(x_\circ,y_\circ)+iv_x(x_\circ,y_\circ).$$

تذکر. دو تساوی فوق به روابط کشی-ریمان یا معادلات کشی-ریمان و یا شرایط کشی-ریمان شهرت دارند.

نکته. اگر در نقطه‌ای روابط کشی-ریمان برقرار نباشد در آن نقطه مشتق موجود نیست.

مثال ۱.۱۱. تابع $f(z)=x^۲-۲y^۲+۳ixy$ در نقاطی که $۲x\neq ۳x$ یا $-۳y\neq -۴y$ باشد، مشتق ندارد. پس این تابع در نقاط $z\neq ۰$ مشتق ندارد.

ما به‌دنبال محکی برای مشتق‌پذیری تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ هستیم. این محک را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۱.۵ (شرط کافی کشی-ریمان). فرض کنید تابع $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ روی دیسک $|z-z_۰|<r$ برای $r>۰$ای تعریف شده و در این دیسک مشتقات نسبی u_x، u_y، v_x و v_y موجود و پیوسته باشند. به‌علاوه در نقطه $z_۰=x_۰+iy_۰$ در روابط کشی-ریمان صدق کنند. آن‌گاه $f'(z_۰)$ موجود و از فرمول $f'(z_۰)=u_x(x_۰,y_۰)+iv_x(x_۰,y_۰)$ قابل حصول است.

علت. با استفاده از بسط مرتبه اوّل تیلر توابع u و v و قرار دادن آنها در فرمول مشتق قابل دیدن است.

مثال ۱.۱۲. تعیین کنید تابع $f(z)=e^{۳x}\cos ۲y+ie^{۲x}\sin ۳y$ در کدام نقاط مشتق‌پذیر است. مشتق آن را نیز به‌دست آورید.

حل. داریم:

$$u(x,y)=e^{۳x}\cos ۲y \quad , \quad v(x,y)=e^{۲x}\sin ۳y$$

در نتیجه روابط کشی-ریمان می‌شود:

$$\begin{cases} ۳e^{۳x}\cos ۲y=۳e^{۲x}\cos ۳y \\ -۲e^{۳x}\sin ۲y=-۲e^{۲x}\sin ۳y \end{cases}$$

پس در نقاطی که دو تساوی زیر برقرار باشد مشتق داریم.

$$\tan ۲y=\tan ۳y \quad , \quad e^{x}\cos ۲y=\cos ۳y$$

تساوی سمت چپ فقط برای $y=k\pi, k=۰,\pm۱,\pm۲,\cdots$ برقرار است. لیکن تساوی دوم فقط برای k زوج و $x=۰$ می‌توانند برقرار باشد. پس نقاط مشتق‌پذیری عبارتند از

$z = 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ و مشتق در این نقاط می‌شود:

$$f'(z) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=2k\pi i} = \left(3e^{3x}\cos 2y + 2ie^{2x}\sin 3y\right)\Big|_{z=2k\pi i} = 3$$

مثال ۱۳.۱. نشان دهید $f(z) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$ در تمام نقاط مشتق‌پذیر است و مشتق آن را نیز به‌دست آورید.

حل. داریم $v(x,y) = \cos x \sinh y$ و $u(x,y) = \sin x \cosh y$. پس روابط کشی-ریمان می‌شود:

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = \cos x \cosh y \\ \sin x \sinh y = \sin x \sinh y. \end{cases}$$

پس روابط کشی-ریمان در تمام نقاط $\mathbb{C}$ برقرار است. پس این تابع همه‌جا مشتق‌پذیر است. همچنین

$$f'(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

بعضی مواقع یک تابع مختلط در مختصات قطبی داده می‌شود. برای تشخیص مشتق‌پذیری تابع و محاسبه آن در این مختصات نیاز به روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی است که در خاصیت زیر می‌آید.

خاصیت ۶.۱. فرض کنید تابع مختلط $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ روی دیسک $|z - z_0| < \rho$ برای $\rho > 0$ تعریف شده باشد و $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ و $z = re^{i\theta}$.

۱) اگر f در نقطه z_0 مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه روابط کشی-ریمان زیر برقرار است:

$$\begin{cases} r_0 u_r(r_0,\theta_0) = v_\theta(r_0,\theta_0) \\ r_0 v_r(r_0,\theta_0) = -u_\theta(r_0,\theta_0) \end{cases} \qquad \text{(روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی)}$$

همچنین $f'(z_0) = e^{-i\theta_0}\left(u_r(r_0,\theta_0) + iv_r(r_0,\theta_0)\right)$.

۲) اگر مشتقات مرتبه اوّل u و v نسبت به r و θ در دیسک فوق موجود و پیوسته باشند و در نقطه z_0 در دو تساوی فوق صدق کنند، آن‌گاه $f'(z_0)$ موجود و از فرمول مشتق فوق قابل محاسبه است.

علت. u_x، u_y، v_x و v_y را بر حسب u_r، u_θ، v_r و v_θ محاسبه و در روابط کشی-ریمان قرار دهید و برای $u_\theta(r_\circ,\theta_\circ)$ و $v_\theta(r_\circ,\theta_\circ)$ حل کنید به دو تساوی فوق می‌رسید. فرمول مشتق نیز از قرار دادن u_x ، v_x بر حسب u_r، u_θ، v_r و u_θ بعد از ساده نمودن به‌صورت فوق حاصل می‌گردد.

مثال ۱.۱۴. نشان دهید تابع $f(z)=r^{۱/۴}e^{i\theta/۴},\ \ r>\circ, -\pi<\theta<\pi$ مشتق‌پذیر است. مشتق آن را نیز محاسبه کنید.

حل. داریم $f(z)=r^{\frac{۱}{۴}}\cos\frac{\theta}{۴}+ir^{\frac{۱}{۴}}\sin\frac{\theta}{۴}$، پس

$$u(r,\theta)=r^{\frac{۱}{۴}}\cos\frac{\theta}{۴}\quad,\quad v(r,\theta)=r^{\frac{۱}{۴}}\sin\frac{\theta}{۴}.$$

روابط کشی-ریمان فوق به‌صورت زیر برقرار است.

$$\begin{cases} r\cdot\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}\cos\frac{\theta}{۴}=\frac{۱}{۴}r^{\frac{۱}{۴}}\cos\frac{\theta}{۴},\\ r\cdot\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}\sin\frac{\theta}{۴}=\frac{۱}{۴}r^{\frac{۱}{۴}}\sin\frac{\theta}{۴}.\end{cases}$$

پس این تابع در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} f'(z)&=e^{-i\theta}\left(\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}\cos\frac{\theta}{۴}+\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}\sin\frac{\theta}{۴}\right)\\ &=e^{-i\theta}\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}e^{i\frac{\theta}{۴}}=\frac{۱}{۴}r^{-\frac{۳}{۴}}e^{-\frac{۳i\theta}{۴}}.\end{aligned}$$

تذکر. توجه کنید در مثال فوق $f(z)=\sqrt[۴]{z}$ و $f'(z)=\frac{۱}{۴\sqrt[۴]{z^۳}}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱. مجموعه نقاط D از صفحه را باز گوییم اگر $z_\circ\in D$ باشد آن‌گاه $R>\circ$ای موجود باشد به‌طوری‌که تمام نقاط همانند z با $|z-z_\circ|<R$ نیز در D باشد.

تابع تحلیلی: می‌گوییم تابع $f(z)$ تابعی تحلیلی است اگر دامنه $f(z)$ یک مجموعه باز از نقاط صفحه باشد و $f(z)$ در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد.

تذکر. ۱) کلیه توابع در این کتاب دارای دامنه باز هستند.

۲) کلیه خواصی که برای مشتق موجود است برای تابع تحلیلی نیز برقرار است.

۳) در فصل ۲ خواهیم دید که هر تابع تحلیلی نه تنها بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است بلکه دارای بسط تیلر نیز می‌باشد. در نتیجه قسمت حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی، مشتقات پاره‌ای از هر مرتبه‌ای نسبت به x و y دارند.

تابع تام: تابع تحلیلی با دامنه $\mathbb{C}$ را تابع تام گویند.

مثال ۱.۱۵. هر تابع چندجمله‌ای تام است. لیکن تابع منطق تام نیست. $p(z) = z^{5} - iz^{2} + 2$ تام، لیکن $f(z) = \frac{z^{2}+iz-1}{z^{2}+1}$ تام نیست.

مطالب نهائی در این بخش ارتباط بین تابع همساز و تابع تحلیلی است. این ارتباط حل مسائل بعضی از معادلات پاره‌ای را با استفاده از توابع تحلیلی مقدور می‌سازد. در ابتدا تعریف تابع همساز را داریم.

تعریف ۱.۲. تابع حقیقی $h(x,y)$ با دامنه باز D را همساز یا هارمونیک گوییم اگر

۱) کلیه مشتقات مرتبه دوم آن موجود و پیوسته باشد.

۲) روی D تساوی $h_{xx} + h_{yy} = 0$ برقرار باشد. یعنی h یک جواب معادله لاپلاس باشد.

در خاصیت زیر فرض بر این است که u و v دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته‌اند.

خاصیت ۱.۷. ۱) قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

۲) ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

علت. ۱) فرض کنید $f = u + iv$ تحلیلی باشد. روابط کشی-ریمان را به‌صورت زیر داریم:

$$u_x = v_y \quad , \quad u_y = -v_x.$$

از طرفین معادله سمت چپ نسبت به x و از طرفین معادله سمت راست نسبت به y مشتق بگیرید و با هم جمع کنید تا به‌دست آورید $u_{xx} + u_{yy} = 0$. مشابهاً به‌دست می‌آید $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

۲) فرض کنید $h(u,v)$ همساز و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع تحلیلی است. نشان می‌دهیم $H(x,y) = h(u(x,y), v(x,y))$ همساز است. برای این‌کار H_{xx} و H_{yy} را محاسبه و با هم جمع می‌کنیم.

$$H_x = h_u u_x + h_v v_x$$

$$H_{xx} = h_{uu} u_x^{2} + h_{uv} v_x u_x + h_u u_{xx} + h_{uv} u_x v_x + h_{vv} v_x^{2} + h_v v_{xx}$$

پس

$$H_{xx} = h_{uu}u_x^۲ + ۲h_{uv}u_xv_x + h_{vv}v_x^۲ + h_uu_{xx} + h_vv_{xx}.$$

مشابهاً

$$H_{yy} = h_{uu}u_y^۲ + ۲h_{uv}v_yu_y + h_{vv}v_y^۲ + h_uu_{yy} + h_vv_{yy}.$$

با جمع کردن این دو تساوی و استفاده از روابط کشی-ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ به‌دست می‌آوریم.

$$H_{xx} + H_{yy} = h_{uu}(u_x^۲ + u_y^۲) + h_{vv}(u_y^۲ + u_x^۲)$$
$$+ h_u(u_{xx} + u_{yy}) + h_v(v_{xx} + v_{yy}).$$

چون $u + iv$ تحلیلی است پس $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ و $v_{xx} + v_{yy} = ۰$. پس

$$H_{xx} + H_{yy} = h_{uu}(u_x^۲ + u_y^۲) + h_{vv}(u_y^۲ + u_x^۲)$$
$$= (u_x^۲ + u_y^۲)(h_{uu} + h_{vv}) = ۰.$$

از هر تابع همساز می‌توان یک تابع تحلیلی ساخت. مفاهیم زیر در این ارتباط است.

مزدوج همساز: فرض کنید u تابعی همساز است. تابع v را مزدوج همساز u گوییم اگر $f = u + iv$ تحلیلی باشد.

می‌توان نشان داد هر تابع همساز دارای مزدوج همساز است لیکن محاسبه آن با استفاده از روابط کشی-ریمان مقدور است.

مثال ۱.۱۶. مزدوج همساز تابع همساز $u(x,y) = \cos x \cosh y + x^۲ - y^۲ + x$ را به‌دست آورید.

حل. اگر v مزدوج هارمونیک باشد در این‌صورت $f = u + iv$ تحلیلی است. پس $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$. پس داریم:

$$v_x = -\cos x \sinh y + ۲y$$

$$v_y = -\sin x \cosh y + ۲x + ۱$$

حال از طرفین تساوی اولی نسبت به x انتگرال بگیرید.

$$v(x,y) = -\sin x \sinh y + ۲xy + h(y)$$

آن را در تساوی دوم قرار دهید تا h به‌دست آید.

$$v_y = -\sin x \cosh y + ۲x + h'(y) = -\sin x \cosh y + ۲x + ۱$$

پس $h'(y) = ۱$ یا $h(y) = y + a$. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$v(x,y) = -\sin x \sinh y + ۲xy + y + a,$$

که در آن a یک ثابت حقیقی است.

تمرین ۲.۱

۱. دامنه تحلیلی ماگزیمال هر یک از توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(z) = \frac{z^۲-۹}{z^۲-۳z-۲}$

ب) $f(z) = (z + \frac{۱}{z^۲})^۳$

ج) $f(z) = \frac{z^۲+i}{z^۲-۲}$

د) $f(z) = \frac{z^۵+iz}{z^۳+۱}$

۲. مشتق تابع تحلیلی زیر را به‌دست آورید.

$$f(z) = x^۳ - ۳xy^۲ + \frac{x}{x^۲+y^۲} + iv(x,y)$$

۳. تعیین کنید تابع $f(z) = \sin ۲x \cosh ۳y + i\cos ۳x \sinh ۲y$ در کدام نقاط مشتق‌پذیر است. مشتق آن را نیز بیابید.

۴. تابع f را با دامنه $\mathbb{C}$ طوری به‌دست آورید تا روی دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ مشتق‌پذیر و در سایر نقاط مشتق‌پذیر نباشد.

۵. تابع f را با دامنه $\mathbb{C}$ طوری بیابید تا روی نیم‌دایره $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ مشتق‌پذیر و در سایر نقاط مشتق‌پذیر نباشد.

۶. نشان دهید $f(z) = r^{۱/n} e^{i\theta/n},\ \ r > ۰,\ ۰ < \theta < \pi$ تحلیلی است. مشتق آن را نیز به‌دست آورید.

۷. آیا تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز بیابید.

$$u(x,y) = \sinh x \cos y + ۳x^{۲}y - y^{۳} - ۲$$

۸. نشان دهید تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز به‌دست آورید.

$$u(x,y) = x^{۳} - ۳xy^{۲} + e^{۲x}\cos ۲y + ۲xy - y$$

۹. a و b را طوری تعیین کنید تا تابع زیر همساز باشد. مزدوج همساز آن را نیز به‌دست آورید.

$$u(x,y) = e^{ax}\cos by$$

۱۰. نشان دهید تابع زیر همساز است. مزدوج همساز آن را نیز به‌دست آورید.

$$u(x,y) = e^{x^{۲}-y^{۲}}\sin ۲xy$$

۳.۱ توابع مقدماتی

در این بخش به معرفی توابع مقدماتی مختلط می‌پردازیم. همانند توابع مقدماتی حقیقی از این توابع برای بیان مفاهیم توابع مختلط و کاربرد آنها استفاده می‌گردد. توابع مقدماتی حقیقی اساسی عبارتند از چندجمله‌ای، تابع نمایی، سینوس و کسینوس. سایر توابع مقدماتی با چهار عمل اصلی یا به‌صورت تابع معکوس آنها بیان می‌گردد. سایر توابع به‌صورت ترکیبی از توابع مقدماتی‌اند. این توابع به‌صورت طبیعی ظاهر می‌شوند و در اصل جواب‌های معادلات دیفرانسیل هستند که پدیده‌های فیزیکی را بیان می‌کنند.

تابع چندجمله‌ای را قبلاً تعریف کردیم. سه تابع اساسی دیگر یعنی تابع نمایی، سینوس و کسینوس می‌بایستی طوری تعریف شوند تا دو خصلت اساسی زیر را داشته باشند. یکی این‌که تعمیمی از تابع‌های حقیقی هم‌نام خودشان باشند و دیگر این‌که تام باشند یعنی با دامنه $\mathbb{C}$ و تحلیلی باشند.

خواهیم دید با تعریف تابع نمائی دو تابع دیگر نیز قابل بیان می‌شوند.

الف) تابع نمائی: با توجه به این‌که تابع نمائی حقیقی، $y = e^x$، جواب یگانه مسئله با شرط اولیه

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y \\ y(۰) = ۱ \end{cases}$$

است. برای این‌که تابع نمائی مختلط که با، $w = e^z$، نشان می‌دهیم دو خاصیت ذکر شده فوق را داشته باشد آن را در جواب مسئله با شرط اولیه مختلط زیر جستجو می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = w \\ w(x) = e^x \end{cases}$$

که در آن مانند قبل $z = x + iy$ و $w = u + iv$ است. این مسئله بر حسب u و v و x و y به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{cases} u_x + iv_x = u + iv \\ u(x,\circ) = e^x, \quad v(x,\circ) = \circ \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب به چهار معادله زیر برای تعیین u و v می‌رسیم که دو معادله آن همان روابط کشی-ریمان هستند که برای تحلیلی بودن w می‌بایستی برقرار باشند.

$$u_x = u, \quad v_x = v, \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

از حل دو معادله سمت چپ جواب عمومی آنها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,y) = C_۱(y)e^x \quad , \quad v(x,y) = C_۲(y)e^x$$

برای برقراری دو معادله دیگر این جواب‌ها را در آن دو معادله قرار می‌دهیم. در نتیجه

$$C_۱'(y) = -C_۲(y) \quad , \quad C_۱(y) = C_۲'(y).$$

به‌این‌ترتیب برای $C_۲(y)$ به‌دست می‌آوریم $C_۲''(y) + C_۲(y) = \circ$ یا $C_۲(y) = A\cos y + B\sin y$. همچنین $C_۱(y) = B\cos y - A\sin y$. از طرف دیگر از شرایط اولیه $u(x,\circ) = e^x$ و $v(x,\circ) = \circ$ به‌دست می‌آوریم $C_۱(\circ) = ۱$ و $C_۲(\circ) = \circ$. با اعمال این شرایط روی دو جواب عمومی فوق

$$C_۲(\circ) = A = \circ \quad , \quad C_۱(\circ) = B = ۱.$$

پس $C_۱(y) = \cos y$ و $C_۲(y) = \sin y$ و $w = e^x\cos y + ie^x\sin y$.

تابع نمائی مختلط: تابع $e^x\cos y + ie^x\sin y$ را تابع نمائی مختلط گوییم و با e^z نشان می‌دهیم. پس

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

از این پس برای بیان این تابع مختصراً می‌گوییم تابع نمائی. خواص تابع نمائی را در زیر داریم.

۱) این تابع تام است و $\frac{d}{dz}e^z = e^z$.

۲) داریم: $|e^z| = e^x$ و $\arg e^z = y$.

۳) تعریف تابع نمای موهومی یعنی $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ با این تعریف تطبیق دارد چون $e^{iy} = \cos y + i\sin y$.

۴) تابع نمائی خواص جبری تابع نمای حقیقی را دارد. یعنی:

$$e^{z_۱} \cdot e^{z_۲} = e^{z_۱+z_۲} \quad , \quad e^{-z} = \frac{۱}{e^z}.$$

چون

$$\begin{aligned} e^{z_۱} \cdot e^{z_۲} &= e^{x_۱+iy_۱} \cdot e^{x_۲+iy_۲} = e^{x_۱} \cdot e^{iy_۱} \cdot e^{x_۲} \cdot e^{iy_۲} = e^{x_۱} \cdot e^{x_۲} \cdot e^{iy_۱} \cdot e^{iy_۲} \\ &= e^{x_۱+x_۲} \cdot e^{i(y_۱+y_۲)} = e^{z_۱+z_۲} \end{aligned}$$

و

$$e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x} \cdot e^{-iy} = \frac{۱}{e^x} \cdot \frac{۱}{e^{iy}} = \frac{۱}{e^x \cdot e^{iy}} = \frac{۱}{e^{x+iy}} = \frac{۱}{e^z}.$$

که در اینجا از خواص $e^{x_۱+x_۲} = e^{x_۱} \cdot e^{x_۲}$ تابع نمائی حقیقی و $e^{i(\theta_۱+\theta_۲)} = e^{i\theta_۱} \cdot e^{i\theta_۲}$ که بعد از فرمول دوموآور نشان داده شده بود استفاده گردیده است.

۵) این تابع نمائی تناوبی با دوره تناوب $۲\pi i$ است. چون

$$\begin{aligned} e^{z+۲\pi i} = e^{x+iy+۲\pi i} = e^{x+i(y+۲\pi)} &= e^x\Big(\cos(y+۲\pi) + i\sin(y+۲\pi)\Big) \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \end{aligned}$$

ب) توابع مثلثاتی: از فرمول‌های $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ و $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ به‌دست می‌آوریم:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲} \quad , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}$$

برای این‌که توابع سینوسی و کسینوسی مختلط با توابع سینوس و کسینوس حقیقی سازگاری داشته باشد و تام نیز باشد آنها را با استفاده از فرمول‌های فوق به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i}.$$

تذکر. ۱) سایر توابع مثلثاتی مشابه حقیقی تعریف می‌شوند.

۲) کلیه فرمول‌های توابع مثلثاتی حقیقی برای توابع مثلثاتی مختلط برقرار است.

۳) کلیه اتحادهای مثلثاتی حقیقی برای مختلط هم برقرار است.

۴) با این‌که $\sin^{۲} z+\cos^{۲} z=۱$ لیکن $\sin z$ و $\cos z$ هر مقدار مختلط یا حقیقی را به‌خود می‌گیرند. مثلاً معادله $\sin z=۵۰$ دارای جواب است.

۵) فرمول‌های زیر در محاسبات مفیداند.

$$\begin{aligned}
&\cos iy=\cosh y\\
&\sin iy=i\sinh y\\
&\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\\
&\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.
\end{aligned}$$

مثال ۱۷.۱. معادله $\sin z=۵۰$ را حل کنید.

حل. برای این‌کار دستگاه دو معادله زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}\sin x\cosh y=۵۰\\ \cos x\sinh y=۰\end{cases}$$

از معادله دوم به‌دست می‌آوریم $\cos x=۰$ یا $\sinh y=۰$. $\sinh y=۰$ دارای جواب $y=۰$ است که با جاگذاری در معادله اوّل به $\sin x=۵۰$ می‌رسیم که جواب ندارد. پس $\cos x=۰$ یا $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$. برای این x از معادله اوّل به‌دست می‌آوریم، $(-۱)^k\cosh y=۵۰$ که فقط علامت مثبت قابل قبول است. پس:

$$z=(۲k\pi+\frac{\pi}{۲})+i\cosh^{-۱}۵۰.$$

ج) توابع هذلولوی: برای تطبیق توابع هذلولوی مختلط و تام بودن آنها با توجه به فرمول‌های حقیقی

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}\quad,\quad \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}$$

سینوس و کسینوس هذلولوی را به‌صورت زیر می‌گیریم.

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{۲} \quad , \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{۲}.$$

تذکر. ۱) سایر توابع هذلولوی مشابه توابع هذلولوی حقیقی تعریف می‌شوند.

۲) کلیه فرمول‌های توابع هذلولوی حقیقی برای توابع هذلولوی مختلط برقرار است.

۳) کلیه اتحادهای توابع هذلولوی حقیقی برای توابع هذلولوی مختلط هم برقرار است.

۴) فرمول‌های زیر در محاسبات مفیداند.

$$\cosh z = \cos iz \quad , \quad \sinh iz = i \sin z$$
$$\cos z = \cosh iz \quad , \quad \sin z = -i \sinh iz.$$

د) تابع لگاریتم: این تابع می‌بایستی طوری تعریف شود تا دارای سه خاصیت زیر باشد.

۱. معکوس تابع نمائی باشد.

۲. تعمیم لگاریتم نپری حقیقی یعنی $\ln x$ از $\mathbb{R}^{>۰}$ به $\mathbb{C}$ باشد.

۳. تابعی تحلیلی باشد.

با توجه به این نکات برای $z = re^{i\theta} \neq ۰$، لگاریتم آن را به‌صورت زیر می‌گیریم.

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad r > ۰.$$

چون برای هر عدد مختلط z بینهایت مقدار برای θ است پس برای هر z بینهایت مقدار برای $\log z$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱.۱۸. برای $z = ۱ + i$ داریم:

$$\log(۱+i) = \frac{۱}{۲}\ln ۲ + i(\frac{\pi}{۴} + ۲k\pi), \quad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots.$$

برای این‌که تابع داشته باشیم می‌بایستی محدودیتی روی θ قرار دهیم تا برای هر z فقط یک θ داشته باشیم و $\log z$ تک مقداری شود.

شاخه αام لگاریتم: برای هر عدد حقیقی α تابع زیر را شاخه αام لگاریتم گویند.

$$\log_\alpha z = \ln r + i\theta \qquad \alpha \leq \theta < \alpha + ۲\pi.$$

برای این‌که این تابع پیوسته باشد می‌بایستی شعاع $\theta = \alpha$ را از دامنه آن حذف کنیم. به‌این‌ترتیب

$$\log_\alpha z = \ln r + i\theta \qquad \alpha < \theta < \alpha + ۲\pi.$$

شاخه αام تابع لگاریتم است که تابعی تحلیلی می‌باشد. چون

$$u(r,\theta) = \ln r \quad , \quad v(r,\theta) = \theta.$$

پس شرایط کشی-ریمان در مختصات قطبی به‌صورت زیر برقرار است.

$$ru_r = r \cdot \frac{۱}{r} = ۱ = v_\theta \quad , \quad rv_r = ۰ = -u_\theta.$$

همچنین

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}\frac{۱}{r} = \frac{۱}{z}.$$

دامنه این تابع $\{۰\} \cup \{z : \arg z = \alpha\} \setminus \mathbb{C}$ که مجموعه‌ای باز است.

پس این تابع یک تابع تحلیلی است. شعاع $\theta = \alpha$ را برش شاخه و نقطه $z = ۰$ را نقطه شاخه گویند.

شاخه اصلی لگاریتم: شاخه $\alpha = -\pi$ تابع لگاریتم را شاخه اصلی لگاریتم گویند و با $\operatorname{Log} z$ نشان می‌دهند. یعنی

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta \qquad -\pi < \theta < \pi.$$

اکنون به بررسی خواص سه‌گانه مطلوب می‌پردازیم.

۱. معکوس تابع نمائی است.

$$\log_\alpha e^z = \log_\alpha e^x \cdot e^{iy} = \ln e^x + iy = x + iy = z$$
$$e^{\log_\alpha z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} = re^{i\theta} = z.$$

پس شرط تابع معکوس بودن تابع نمائی برقرار است.

۲. تعمیم لگاریتم نپری حقیقی است. برای $x > ۰$ و $-۲\pi < \alpha < ۰$ داریم $x = xe^{۰i}$. پس

$$\log_\alpha x = \ln x.$$

پس برای این شاخه‌ها $(-2\pi < \alpha < 0)$ این خاصیت نیز برقرار است.

۳. با توجه به مطالب قبلی $\log_\alpha z$ تحلیلی است.

نکته. تابع $\log_\alpha z$ یا حتی $\operatorname{Log} z$ خواص جبری $\ln x$ را ندارند. یعنی $\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ یا $\log_\alpha \frac{1}{z} = -\log_\alpha z$ ممکن است برای بعضی از نقاط دامنه برقرار نباشد. به‌عنوان مثال

$$\operatorname{Log} i = \frac{\pi}{2} i \quad , \quad \operatorname{Log}(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}$$

لیکن

$$\operatorname{Log} i(-1+i) = \operatorname{Log}(-1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3\pi}{4} i$$

پس

$$\operatorname{Log} i(-1+i) \neq \operatorname{Log} i + \operatorname{Log}(-1+i).$$

نکته. این مطلب چندان مهم نیست چون نیاز به استفاده از آن نیست.

مفهوم توان در ریاضی به‌صورت تکاملی زیر بیان گردید. برای عدد طبیعی n

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ بار}} = a^n.$$

برای اعداد صحیح منفی m

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}.$$

برای عدد $\frac{1}{n}$، n عدد طبیعی

$$a^{\frac{1}{n}} = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = b^n$$

و آن را ریشه nام عدد طبیعی a گفته و با $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند.

برای عدد گویا $n, m > 0$،

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

برای عدد اصم x و $a > 0$

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

نکته. هر کدام از این تعریف‌ها تعریف‌های قبلی را در بر و با آن سازگاری کامل دارد.

برای اعداد مختلط توان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و آن را توان کلی گویند که حالات قبلی فوق را نیز در بر دارد.

توان کلی: برای عدد مختلط $z \neq ۰$ توان c آن را که یک عدد مختلط است به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$z^c = e^{c \log z}$$

که این‌جا $\log z$ بینهایت مقداری است. پس z^c، بسته به عدد c، می‌تواند یک مقداری، چند مقداری و یا بینهایت مقداری باشد. کلیه توان‌های یک عدد مختلط را توان کلی آن می‌گویند. همچنین $e^{c \operatorname{Log} z}$ را مقدار اصلی توان کلی گویند.

مثال ۱۹.۱. کلیه توان‌های $(۱+i)^{(۱-i)}$ و همچنین مقدار اصلی توان کلی آن را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}(۱+i)^{۱-i} &= e^{(۱-i)\log(۱+i)} = e^{(۱-i)\left(\frac{\ln ۲}{۲}+i(\frac{\pi}{۴}+۲k\pi)\right)}\\ &= e^{\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}+۲k\pi} \cdot e^{(-\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}+۲k\pi)i}\\ &= \sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}+۲k\pi}\left[\cos\left(-\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)+i\sin\left(-\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\right]\end{aligned}$$

که در آن $k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots$. مقدار اصلی به‌ازای $k = ۰$ به‌دست می‌آید. پس

$$(۱+i)^{(۱-i)} \text{ مقدار اصلی } = \sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}}\left[\cos\left(-\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)+i\sin\left(-\frac{\ln ۲}{۲}+\frac{\pi}{۴}\right)\right].$$

تمرین ۳.۱

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\frac{dw}{dz} = \text{۵}w + z$

ب) $\frac{dw}{dz} + \text{۲}zw = \text{۲}z$

ج) $\frac{d^{\text{۲}}w}{dz^{\text{۲}}} + \text{۳}\frac{dw}{dz} + \text{۲}w = e^{z}$

د) $\frac{d^{\text{۴}}w}{dz^{\text{۴}}} + w = e^{\text{۲}z}$

۲. قسمت‌های حقیقی، موهومی، قدر مطلق و شناسه $f(z) = e^{\sin z}$ را مشخص کنید.

۳. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

آ) $e^{z^{\text{۲}}} = \text{۱} + i$

ب) $\operatorname{Log} z = (\text{۱} - i)\pi^{\text{۲}}$

ج) $\sin z = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}i$

د) $\tan z = \text{۱} + i$

۴. بزرگ‌ترین دامنه تحلیلی هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

آ) $f(z) = \operatorname{Log}(z + \text{۱} + i)$

ب) $g(z) = \frac{\operatorname{Log}(z+i)}{z^{\text{۲}}+\text{۴}}$

۵. مشتق شاخه اصلی توان کلی زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(z) = z^{\text{۲}z}$

ب) $f(z) = z^{\sin z}$

۶. کلیه مقادیر و مقدار اصلی هر یک از توان‌های کلی زیر را به‌دست آورید.

آ) $(\text{۱} - i)^{\text{۱}+i}$

ب) $(\text{۱} - i)^{i}$

ج) $(\text{۲}i)^{\text{۱۰}i}$

د) $(\sqrt{\text{۳}} + i)^{\sqrt{\text{۳}}-i}$

۷. شاخه اصلی $f(z) = \sqrt{\text{۱} + z}$ را مشخص کنید.

۸. مقادیر زیر را محاسبه کنید.

آ) $|\cos z|$

ب) $|\cot z|$

ج) $\Re \tanh z$

د) $\Im \coth z^{\text{۲}}$

۴.۱ مروری بر توابع تحلیلی

هدف از توابع مختلط دو قسمت زیر است:

هدف اول: محاسبه آسان انتگرال‌های پیچیده مانند

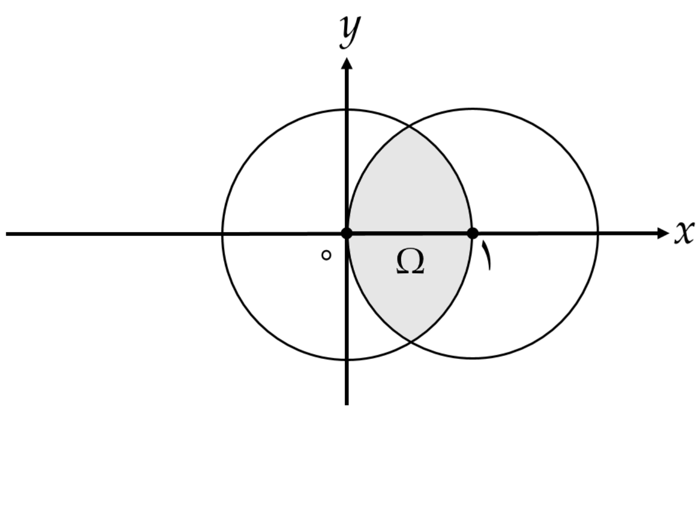
$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^3)^2}\, dx \quad \text{یا} \quad \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{(2+\cos\theta)^2}\, d\theta$$

با استفاده از نتایج این قسمت محاسبه آن‌ها را در حد محاسبه چهار عمل اصلی تقلیل خواهیم داد.

هدف دوم: تبدیل میدان‌های "بد" به میدان‌های "خوب". به‌عنوان مثال حل مسئله زیر روی میدان بین دو دیسک، یعنی شکل ۱.۱ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\Omega : x^2+y^2<1, \quad (x-1)^2+y^2<1 \\ &u_{xx}+u_{yy}=xy, \\ &u\Big|_{\Omega}=x^2-y^2. \end{aligned}$$

حل این مسئله با استفاده از مباحثی که تاکنون گفته‌شده مقدور نیست. با تبدیل Ω فوق به نیم‌دایره یا دایره



شکل ۱.۱: میدان بین دو دیسک

یا نیم‌صفحه، حل این مسئله آسان می‌گردد. ابزار انجام این کارها توابع تحلیلی (یعنی مختلط مشتق‌پذیر) است. تابع مختلط تابعی با دامنه و برد اعداد مختلط است.

در ابتدا، کار با اعداد مختلط را مرور می‌کنیم.

اعداد مختلط: یک عدد مختلط را به‌صورت $z = x + iy$ داریم که در آن x و y اعداد حقیقی‌اند. برای

اعداد مختلط در انجام چهار عمل اصلی مانند اعداد حقیقی عمل می‌کنیم و به‌جای $i^۲$ عدد -۱ را قرار می‌دهیم.

مثال ۱.۲۰. عدد مختلط زیر را ساده کنید. یعنی به‌صورت $a+ib$ بنویسید.

$$\frac{(۱+i)^۲-(۱-i)^۳}{(۲+۳i)(۳-۲i)}$$

حل. تمام اتحادهای حقیقی برقرار است.

$$\begin{aligned}\frac{(۱+i)^۲-(۱-i)^۳}{(۲+۳i)(۳-۲i)}&=\frac{۱+۲i+i^۲-(۱-۳i+۳i^۲-i^۳)}{۶-۴i+۹i-۶i^۲}\\&=\frac{۱+۲i-۱-۱+۳i-۳(-۱)+i(-۱)}{۶+۵i+۶}=\frac{۲+۴i}{۱۲+۵i}.\end{aligned}$$

برای حذف i از مخرج کسر صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج کسر ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{۲+۴i}{۱۲+۵i}\cdot\frac{۱۲-۵i}{۱۲-۵i}&=\frac{۲۴-۱۰i+۴۸i-۲۰i^۲}{۱۲^۲-۵^۲(i^۲)}\\&=\frac{۲۴+۳۸i-۲۰(-۱)}{۱۴۴-۲۵(-۱)}=\frac{۴۴+۳۸i}{۱۶۹}\\&=\frac{۴۴}{۱۶۹}+\frac{۳۸}{۱۶۹}i.\end{aligned}$$

نمایش اعداد مختلط:

اعداد مختلط را به‌صورت $z=a+ib$ در مختصات دکارتی نمایش می‌دهیم. در این مختصات داریم

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

پس

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

- r را قدر مطلق z و با $|z|$ نیز نمایش می‌دهند.
- θ را شناسه z می‌گویند و با $\arg z$ نشان می‌دهند.
- x را قسمت حقیقی z می‌گویند و با $\Re z$ نشان می‌دهند.

- y را قسمت موهومی z می‌گویند و با $\Im z$ نشان می‌دهند.

با استفاده از دو اتحاد مثلثاتی

$$\cos(\theta_۱ + \theta_۲) = \cos\theta_۱ \cos\theta_۲ - \sin\theta_۱ \sin\theta_۲$$

و

$$\sin(\theta_۱ + \theta_۲) = \sin\theta_۱ \cos\theta_۲ + \cos\theta_۱ \sin\theta_۲$$

می‌توان نشان داد، برای هر عدد صحیح n تساوی زیر برقرار است:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

این اتحاد به اتحاد دوموآور مشهور است. به‌طور مثال برای $n = ۲$ روابط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\cos^۲\theta - \sin^۲\theta = \cos ۲\theta, \quad ۲\sin\theta\cos\theta = \sin ۲\theta$$

و برای $n = -۱$ نیز خواهیم داشت

$$\frac{۱}{\cos\theta + i\sin\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-۱} = \cos\theta - i\sin\theta.$$

استفاده از قانون دوموآور محاسبات توانی را آسان می‌کند.

مثال ۲۱.۱. عدد $(۱+\sqrt{۳}i)^{۲۰}$ را ساده کنید.

حل. برای این کار از فرمول دموآور استفاده می کنیم.

$$۱+\sqrt{۳}i = ۲\Big(\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Big) = ۲\Big(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\Big)$$

پس

$$\begin{aligned}(۱+\sqrt{۳}i)^{۲۰} &= \Big[۲\Big(\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳}\Big)\Big]^{۲۰} = ۲^{۲۰}\Big(\cos\frac{۲۰\pi}{۳} + i\sin\frac{۲۰\pi}{۳}\Big)\\ &= ۲^{۲۰}\Big(\cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳}\Big) = ۲^{۲۰}\Big(-\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Big)\\ &= -۲^{۱۹} + i\sqrt{۳}\,۲^{۱۹}.\end{aligned}$$

برای $z = x + iy$ عدد $x - iy$ را مزدوج z می‌گویند و با $\bar{z} = x - iy$ نشان می‌دهند. همچنین $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $e^{i\theta}$ نشان می‌دهند و آن را نمای موهومی می‌گویند.

نمای موهومی $e^{i\theta}$ کلیه خواص جبری e^{ax} را دارا است به‌خصوص $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ که همان تساوی پارسیوال است. محاسبه ریشه nام یک عدد مختلط با این تساوی به‌سادگی انجام‌پذیر است.

اگر $z = re^{i\theta}$ در مختصات قطبی و $w = \rho e^{i\phi}$ ریشه nام آن باشد، دراین‌صورت $z = w^n$ یا

$$re^{i\theta} = \left(\rho e^{i\phi}\right)^n = \rho^n e^{in\phi}.$$

پس

$$r = \rho^n, \quad n\phi = \theta + ۲k\pi.$$

درنتیجه

$$\rho = r^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{r} \geq ۰, \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{۲k\pi}{n}$$

و

$$w = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + i\frac{۲k\pi}{n}\right)}, \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$$

یا

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right), \quad k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱$$

یعنی هر عدد مختلط، n تا ریشه مختلط nام دارد.

مثال ۱.۲۲. کلیه ریشه‌های سوم عدد ۸ را به‌دست‌آورید.

حل.

$$z = ۸ = ۸e^{i۰}$$

پس $r = ۸$ و $\theta = ۰$ و $n = ۳$. در نتیجه

$$w = \sqrt[۳]{۸}\left(\cos\left(\frac{۰}{۳} + \frac{۲k\pi}{۳}\right) + i\sin\left(\frac{۰}{۳} + \frac{۲k\pi}{۳}\right)\right), \quad k = ۰, ۱, ۲$$

بنابراین

$$w_۱ = ۲(\cos ۰ + i\sin ۰) = ۲,$$

$$w_۲ = ۲\left(\cos\frac{۲\pi}{۳} + i\sin\frac{۲\pi}{۳}\right) = -۱ + i\sqrt{۳},$$

$$w_۳ = ۲\left(\cos\frac{۴\pi}{۳} + i\sin\frac{۴\pi}{۳}\right) = -۱ - i\sqrt{۳}.$$

تابع مختلط: هر تابع با دامنه اعداد مختلط و برد اعداد مختلط را یک تابع مختلط گویند.
اگر $w = f(z)$ یک تابع مختلط باشد، آن را به‌صورت

$$w = u(x,y) + iv(x,y)$$

نیز می‌توان نوشت که در آن $u(x,y)$ قسمت حقیقی و $v(x,y)$ قسمت موهومی آن است. برای این کار کافی است در $f(z)$ به‌جای z قرار دهیم $x+iy$ و قسمت حقیقی و موهومی آن را جدا کنیم.

مثال ۲۳.۱. تابع $f(z) = z^۳$ را به‌صورت $u(x,y) + iv(x,y)$ بنویسید.

حل.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^۳ = (x+iy)^۳ \\ &= x^۳ + ۳ix^۲y + ۳i^۲xy^۲ + i^۳y^۳ = x^۳ - ۳xy^۲ + i(۳x^۲y - y^۳). \end{aligned}$$

پس

$$u(x,y) = x^۳ - ۳xy^۲, \quad v(x,y) = ۳x^۲y - y^۳.$$

عکس این مطلب نیز صحت دارد. یعنی اگر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ داده‌شده باشد و بگیریم $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، دراین‌صورت $f(z)$ یک تابع مختلط است. چون از $z = x+iy$ داده‌شده مقادیر x و y معین است. از قرار دادن مقدار آن‌ها در $u(x,y)$ و $v(x,y)$ مقدار $f(z)$ به‌دست می‌آید. همچنین از قرار دادن $x = \frac{z+\bar{z}}{۲}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{۲i}$، این $f(z)$ را برحسب z و $\bar{z}$ داریم که می‌توان گفت تابعی از z داریم.

مثال ۲۴.۱. تابع مختلط $f(z) = x^۲ - y^۲ + ۲xyi$ را برحسب z بنویسید.

حل.

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\frac{z+\bar{z}}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{z-\bar{z}}{۲i}\right)^۲ + ۲\left(\frac{z+\bar{z}}{۲}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{۲i}\right)i \\ &= \frac{۱}{۴}\left(z^۲ + ۲z\bar{z} + \bar{z}^۲ + z^۲ - ۲z\bar{z} + \bar{z}^۲ + ۲z^۲ - ۲\bar{z}^۲\right) = z^۲. \end{aligned}$$

در موضوع توابع مختلط فقط تابع‌های مشتق‌پذیر مطرح و مورد توجه‌اند. لیکن برای بیان مفهوم مشتق نیاز به مفهوم حد است.

حد: می‌گوییم $f(z)$ در $z_\circ$ برابر $w_\circ$ است، اگر

$$\lim_{z\to z_\circ} |f(z)-w_\circ| = \circ$$

و می‌نویسیم

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ.$$

توجه کنید این تساوی تعریف حد تابع دومتغیره را در ریاضی ۲ بیان می‌کند. در واقع اگر داریم

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad w_\circ = u_\circ + iv_\circ$$
$$z = x+iy, \quad z_\circ = x_\circ + iy_\circ$$

پس

$$|f(z)-w_\circ|^۲ = \big(u(x,y)-u_\circ\big)^۲ + \big(v(x,y)-v_\circ\big)^۲,$$
$$z \to z_\circ \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \to (x_\circ, y_\circ).$$

بنابراین

$$\lim_{z\to z_\circ} |f(z)-w_\circ| = \lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} \Big[\big(u(x,y)-u_\circ\big)^۲ + \big(v(x,y)-v_\circ\big)^۲\Big].$$

نتیجه ۸.۱.

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = w_\circ \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} u(x,y) = u_\circ, \lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} v(x,y) = v_\circ.$$

پیوستگی: می‌گوییم $w = f(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است اگر

$$\lim_{z\to z_\circ} f(z) = f(z_\circ).$$

نتیجه ۹.۱. $f(z)$ در $z_\circ$ پیوسته است اگر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته باشد.

تذکر. کلیه قواعد، فرمول‌ها و قضایای حد و پیوستگی برای تابع حقیقی $y = f(x)$ برای تابع مختلط $w = f(z)$ نیز برقرار است.

مثال ۲۵.۱. مطلوبست محاسبه $\lim_{z\to ۲} \frac{z^۲-۴}{z-۲}$.

حل. اول

$$\lim_{z\to ۲}\frac{z^۲-۴}{z-۲}=\lim_{z\to ۲}\frac{(z+۲)(z-۲)}{z-۲}=\lim_{z\to ۲}(z+۲)=۴.$$

دوم

قاعده هوبیتال

$$\lim_{z\to ۲}\frac{z^۲-۴}{z-۲}=\lim_{z\to ۲}\frac{۲z}{۱}=۴.\qquad \text{(اگرچه مشتق هنوز تعریف نشده‌است)}$$

مشتق: می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه $z_۰$ دارای مشتق برابر $f'(z)$ است اگر

$$\lim_{z\to z_۰}\frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}=f'(z_۰).$$

تذکر. کلیه قواعد، فرمول‌ها و قضایای مشتق تابع $y=f(x)$ برای $w=f(z)$ نیز برقرار است.

توجه کنید با استفاده از فرم نمایش $w=f(z)$ فقط چندجمله‌ای و تابع کسری یا یک چندجمله‌ای تقسیم بر چندجمله‌ای از روی مطالب مربوط به اعداد مختلط معنی دارد. برای این توابع مشتق مانند تابع مشابه حقیقی است.

برای توابع به‌صورت $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ تشخیص مشتق‌پذیری از روی روابط کشی-ریمان مقدور است.

خاصیت ۱۰.۱ (شرط کافی کشی-ریمان). اگر u_x، u_y، v_x و v_y موجود و پیوسته و در روابط کشی-ریمان

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x$$

صدق نماید، آنگاه تابع فوق مشتق‌پذیر و

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=u_x+iv_x.$$

مثال ۲۶.۱. تابع $f(z)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ مشتق‌پذیر است چون

$$u_x=\cos x\cosh y,\quad v_y=\cos x\cosh y,$$
$$u_y=\sin x\sinh y,\quad v_x=-\sin x\sinh y.$$

پس روابط کشی-ریمان برقرار است و این مشتقات نسبی پیوسته اند. درنتیجه، $f'(z)$ موجود است و

$$f'(z)=u_x+iv_x=\sin x\cosh y-i\sin x\sinh y.$$

بعضی از توابع در مختصات قطبی داده‌می‌شود. تشخیص مشتق‌پذیری و مشتق آن‌ها با استفاده از روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی مقدور است.

خاصیت ۱۱.۱ (شرط کافی کشی-ریمان در مختصات قطبی). فرض کنید برای

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

u_r، u_θ، v_r و v_θ موجود و پیوسته و شرایط کشی-ریمان در مختصات قطبی

$$ru_r=v_\theta,\quad rv_r=-u_\theta$$

برقرار باشد، آنگاه $f'(z)$ موجود و

$$f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r).$$

مثال ۲۷.۱. برای تابع $f(z)=r^{\frac{۱}{۲}}\cos\frac{\theta}{۲}+ir^{\frac{۱}{۲}}\sin\frac{\theta}{۲}$ داریم:

$$u_r=\frac{۱}{۲}r^{-\frac{۱}{۲}}\cos\frac{\theta}{۲},\quad v_\theta=\frac{۱}{۲}r^{\frac{۱}{۲}}\cos\frac{\theta}{۲},$$
$$u_\theta=-\frac{۱}{۲}r^{\frac{۱}{۲}}\sin\frac{\theta}{۲},\quad v_r=\frac{۱}{۲}r^{-\frac{۱}{۲}}\sin\frac{\theta}{۲}.$$

پس روابط کشی-ریمان در مختصات قطبی برقرار است. درنتیجه

$$f'(z)=e^{-i\theta}\left(\frac{۱}{۲}r^{-\frac{۱}{۲}}\cos\frac{\theta}{۲}+i\frac{۱}{۲}r^{-\frac{۱}{۲}}\sin\frac{\theta}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}r^{-\frac{۱}{۲}}e^{-i\frac{\theta}{۲}}.$$

با توجه به روابط کشی-ریمان، اگر دو تابع دومتغیره مشتق‌پذیر $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را بدهند شانس

اینکه تابع مختلط $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، بسیار کم است. سوال این است که اگر تابع مشتق‌پذیر $u(x,y)$ را بدهند، آیا تابعی مثل $v(x,y)$ موجود است به‌طوری‌که $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ مشتق‌پذیر باشد؟ قبل از بیان جواب این سوال دو تعریف زیر مفید است.

تعریف ۳.۱. اگر دامنه تابع $w = f(z)$ یک مجموعه باز از نقاط صفحه باشد و روی این دامنه مشتق‌پذیر باشد، این تابع را یک تابع تحلیلی گویند.

تعریف ۴.۱. تابع دومتغیره $h(x,y)$ را همساز گوییم اگر جواب معادله لاپلاس باشد، یعنی $u_{xx} + u_{yy} = ۰$.

خاصیت ۱۲.۱. الف) قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز است. یعنی اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه $u_{xx} + u_{yy} = ۰$ و $v_{xx} + v_{yy} = ۰$.

ب) ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

ج) اگر $u(x,y)$ همساز باشد، آنگاه $v(x,y)$ همساز موجود است به‌طوری‌که $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی است.

تعریف ۵.۱. تابع همساز $v(x,y)$ فوق را مزدوج همساز $u(x,y)$ گویند.

تذکر. تعیین $v(x,y)$ از روی $u(x,y)$ با استفاده از روابط کشی-ریمان مقدور است.

مثال ۲۸.۱. مزدوج همساز تابع همساز $u(x,y) = x^۲ - y^۲ + e^x \cos y$ را بیابید.

حل. تابع مزدوج همساز $v(x,y)$ می‌بایستی همراه با $u(x,y)$ تابع تحلیلی $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ را تشکیل دهند. پس u و v باید در روابط کشی-ریمان صدق کنند. یعنی

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

درنتیجه v باید در دو معادله زیر صدق کند:

$$v_y = ۲x + e^x \cos y$$
$$v_x = ۲y + e^x \sin y.$$

اگر از معادله اول نسبت به y انتگرال بگیریم، به‌دست می‌آوریم:

$$v(x,y) = ۲xy + e^x \sin y + h(x),$$

چون انتگرال نسبی و نسبت به y است، پس ثابت انتگرال تابعی از x است. حال $h(x)$ می‌بایستی طوری انتخاب شود تا معادله دوم برقرار گردد. از قرار دادن آن در معادله دوم به‌دست می‌آوریم

$$v_x = ۲y + e^x \sin y + h'(x) = ۲y + e^x \sin y.$$

به‌این ترتیب به‌دست می‌آوریم $h'(x) = ۰$ یا $h(x) = c$ یعنی تابع $h(x)$ ثابت حقیقی است. پس

$$v(x,y) = ۲xy + e^x \sin y + c$$

و

$$f(z) = x^۲ - y^۲ + e^x \cos y + i(۲xy + e^x \sin y + c)$$

تمرین ۴.۱

۱. اعداد مختلط زیر را ساده کنید.

الف: $\frac{۳(۱-i)^۸ - i(۱-i\sqrt{۳})^۹}{۲(۱+i)^۶ + i(\sqrt{۳}-i)^۷}$

ب: $\sqrt[۴]{-\sqrt{۶} + \sqrt{۱ - \sqrt{۳}i}}$

ج: $\sqrt[۴]{\sqrt{۲} - \sqrt{-i}}$

۲. قسمت حقیقی، قسمت موهومی، قدر مطلق و شناسه (آوند یا آرگومان) توابع زیر را مشخص کنید.

الف: $\cosh(z^۲ + ۱)$

ب: $\sin(z^۲ - i)$

۳. نشان دهید تابع $u(r,\theta)=r^{\frac{۳}{۴}}\sin\left(\frac{۳}{۴}\theta\right)-۲\theta+۳\ln r$ همساز است و مزدوج همساز آن را به‌دست آورید.

۴. مشتق تابع تحلیلی $f(z)=u(x,y)+i\,e^{y^۳-۳x^۲y}\sin(x^۳-۳xy^۲)$ را به‌دست آورید.

۵. مشتق تابع تحلیلی $f(z)=e^{۳x^۲y-y^۳}\cos(x^۳-۳xy^۲)+i\,v(x,y)$ را به‌دست آورید.

۵.۱ مروری بر توابع مقدماتی مختلط

توابع مقدماتی حقیقی یعنی چندجمله‌ای، نمایی و مثلثاتی ابزارهایی برای بیان مفاهیم علمی و اجتماعی هستند و این توابع به‌صورت طبیعی در زندگی بشر ظاهر شده‌اند. سایر توابع دیگر که در زندگی بشر مؤثراند به‌صورتی از روی این توابع ساخته می‌شوند و قابل بیان هستند.

توابع مقدماتی مختلط می‌بایستی طوری بیان شوند تا دارای کلیه خواص هم‌نام حقیقی خود باشند. دو خاصیت زیر را تمام آن‌ها می بایستی داشته‌باشند.

الف: تعمیمی از تابع مقدماتی حقیقی هم‌نام خود باشد. مثلاً تابع $\sin z$ می‌بایستی طوری تعریف گردد که اگر به‌جای z مختلط در آن عدد حقیقی x را قرار دهیم تابع حاصل همان $\sin x$ حقیقی باشد.

ب: توابع تحلیلی باشند. چون کلیه توابع مقدماتی حقیقی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیراند.

تابع چندجمله‌ای قبلاً تعریف شده‌است. چنانچه تابع نمایی، سینوس و کسینوس مختلط را تعریف کنیم سایر توابع مقدماتی از روی آن‌ها قابل‌بیان است. ابتدا به تعریف تابع نمایی مختلط می‌پردازیم. خواهیم دید سینوس و کسینوس مختلط از روی آن قابل‌بیان است.

الف: تابع نمایی

تابع نمایی حقیقی را به‌صورت معکوس تابع لگاریتم نپری تابع $\ln x$ پذیرفتیم و با e^x نشان دادیم. همچنین در بخش اعداد مختلط تابع نمایی موهومی را به‌صورت $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ در نظر گرفتیم و دیدیم این تابع نیز خواص اساسی تابع نمایی حقیقی را دارد. برای تطبیق تابع نمایی مختلط با این دو مفهوم قبلی برای $z=x+iy$ تابع نمایی مختلط را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\,.\,e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

یا

$$e^z = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

حال نشان می‌دهیم این تابع یک تابع تام است. یعنی برای تمام اعداد مختلط تعریف می‌شود و در تمام این نقاط مشتق‌پذیر است. برای این کار از شرط کافی کشی-ریمان استفاده می‌کنیم. داریم

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

پس

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y,$$
$$v_y = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y.$$

درنتیجه

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

یعنی شرط کشی-ریمان در تمام نقاط $\mathbb{C}$ برقرار و این مشتقات نسبی نیز پیوسته‌اند. بنابراین e^z تابعی تحلیلی با دامنه $\mathbb{C}$ است. بعلاوه

$$\frac{de^z}{dz} = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

این تابع نمایی کلیه خواص تابع نمایی حقیقی را دارد. مثلاً

$$e^z \neq ۰, \quad e^{z_۱ + z_۲} = e^{z_۱} . e^{z_۲}, \quad e^{-z} = \frac{۱}{e^z}.$$

این تابع همچنین تناوبی با دوره تناوبی $۲\pi i$ است.

$$e^{z+۲\pi i} = e^z . e^{۲\pi i} = e^z . ۱ = e^z.$$

ب: توابع مثلثاتی

برای تعریف توابع مثلثاتی مختلط از تابع نمایی استفاده می‌کنیم. داریم:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

از این دو اتحاد به‌دست می‌آوریم

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}.$$

برای تطبیق سینوس و کسینوس مختلط با سینوس و کسینوس حقیقی می‌گیریم:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}.$$

سایر توابع مثلثاتی مشابه توابع حقیقی تعریف می‌شوند. مثلاً

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

تذکر. کلیه فرمول‌ها و اتحادهای توابع مثلثاتی حقیقی برای این توابع مثلثاتی نیز برقرار است.

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z,$$
$$\sin(z_۱+z_۲) = \sin z_۱ \cos z_۲ + \cos z_۱ \sin z_۲.$$

اتحادهای زیر در محاسبات مفیداند:

$$\sin iy = i\sinh y, \quad \cos iy = \cos hy,$$
$$\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y,$$
$$\cos z = \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y.$$

با وجود برقراری اتحاد $\cos^۲ z + \sin^۲ z = ۱$، لیکن $\sin z$ و $\cos z$ هر عدد مختلط را به‌خود می‌گیرد. همچنین $|\sin z|$ و $|\cos z|$ هر عدد مثبت را به‌خود می‌گیرد.

مثال ۲۹.۱. مطلوبست حل معادله $\sin z = ۵۰$.

حل. با توجه به اتحاد فوق داریم

$$\sin x \cosh y = ۵۰,$$
$$\cos x \sinh y = ۰.$$

از حل معادله دوم داریم $\sinh y = ۰$ یا $\cos x = ۰$.

$$\sinh y = ۰ \quad \Rightarrow \quad \cosh y = ۱.$$

از معادله اول به‌دست می‌آوریم $\sin x = ۵۰$ که فاقد جواب است.

$$\cos x = ۰ \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm ۱.$$

برای $\sin x = -1$ از معادله اول به‌دست می آوریم $\cosh y = -50$ که باز هم فاقد جواب است.

برای $\sin x = 1$ از معادله اول به‌دست می آوریم $\cosh y = 50$ یا $e^y + e^{-y} = 100$ یا $e^{2y} - 100e^y + 1 = 0$ یا $e^y = 50 \pm \sqrt{50^2 - 1}$ یا $y = \ln\left(50 + \sqrt{2499}\right), y = \ln\left(50 - \sqrt{2499}\right)$. از طرفی

$$\cos x = 0, \sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

پس

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + i\ln\left(50 \pm \sqrt{2499}\right), \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ج: توابع هذلولوی

توابع هذلولوی مختلط با استفاده از توابع هذلولوی حقیقی با تغییر متغیر حقیقی به متغیر مختلط قابل‌بیان است. یعنی

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

سایر توابع هذلولوی نیز مشابه حقیقی قابل‌تعریف است و کلیه فرمول‌ها و اتحادهای توابع هذلولوی حقیقی برای مختلط هم برقرار است.

تذکر. با توجه به دو اتحاد

$$\cosh z = \cosh iz, \quad \sinh z = -i\sin iz,$$

از توابع هذلولوی مختلط چندان استفاده نمی‌گردد.

تذکر. توجه کنید توابع سینوس و کسینوس مثلثاتی و هذلولوی تام هستند.

د: تابع لگاریتم

تابع لگاریتم مختلط می‌بایستی طوری تعریف شود تا علاوه بر تحلیلی بودن و تعمیم $\ln x$ بودن، معکوس تابع نمایی e^z هم باشد. با توجه به خاصیت لگاریتم حقیقی حاصل‌ضرب دو مقدار برای $z = re^{i\theta} \neq 0$ می‌گیریم. یعنی

$$\log z = \ln r + i\theta$$

چون θ بی‌نهایت مقداری است، این لگاریتم تابع نیست. برای تابع داشتن می‌بایستی روی θ قیدی قرار دهیم تا یک مقداری شود. اگر برای α ثابت بگیریم $\alpha < \theta \leq \alpha + ۲\pi$، در این‌صورت θ یک مقداری است. درنتیجه تعریف زیر را می‌توان بیان کرد.

تعریف ۶.۱. تابع زیر را شاخه αام لگاریتم گویند

$$\log_\alpha z = \ln r + i\theta, \quad r > ۰, \quad \alpha < \theta \leq \alpha + ۲\pi.$$

این تابع با توجه به خواص زیر تابع مطلوب است:

۱. با استفاده از شرط کافی کشی-ریمان در مختصات قطبی داریم

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}(\frac{۱}{r} + i\,۰) = \frac{۱}{r}e^{-i\theta} = \frac{۱}{z}.$$

پس این تابع روی دامنه خود تحلیلی است.

۲.

$$\log_\alpha e^z = \log_\alpha e^x \,.\, e^{iy} = \ln e^x + iy = x + iy = z,$$
$$e^{\log_\alpha z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r}.e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$$

پس معکوس تابع نمایی است.

۳. اگر $-۲\pi < \alpha < ۰$ باشد، در این‌صورت برای $x > ۰$ داریم $x = xe^{i۰}$. بنابراین $\log_\alpha x = \ln x$. پس برای این شاخه‌ها $\log_\alpha z$ تعمیم $\ln x$ است.

تعریف ۷.۱. $\log_{-\pi} z$ را شاخه اصلی لگاریتم گویند و با $\operatorname{Log} z$ نمایش می‌دهند.

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, \quad r > ۰, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

ه: توان کلی

مفهوم توان را به‌صورت تکاملی زیر داریم:

۱. برای عدد طبیعی a و عدد طبیعی n

$$a^n = \underbrace{a\,.a\,.\,\ldots\,.a}_{n \text{ بار}}$$

۲. برای عدد صحیح و منفی m

$$a^m = \frac{1}{a^{-m}}$$

۳. $a^\circ = 1$

۴. برای هر عدد طبیعی n ریشه nام عدد حقیقی a

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = b^n$$

۵. برای اعداد طبیعی n و m

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

۶. برای $a > \circ$ و عدد اصم x

$$a^x = e^{x \ln a}$$

تذکر. هر کدام از این تعریف‌ها، تعریف‌های قبلی را دربردارد و با آن‌ها سازگار است.

برای اعداد مختلط، توان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که برای اعداد منفی هم برقرار است و با مفاهیم فوق سازگار می‌باشد.

تعریف ۱.۸. برای اعداد مختلط z و c، توان c عدد z را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$z^c = e^{c \log z}$$

تذکر. چون $\log z$ بی‌نهایت مقداری است، پس z^c بی‌نهایت مقداری است. لیکن $e^{c\,\mathrm{Log}\, z}$ یک مقداری است.

تعریف ۱.۹. $e^{c\,\mathrm{Log}\, z}$ را مقدار اصلی z^c می‌گویند.

مثال ۱.۳۰. کلیه مقادیر و مقدار اصلی i^i را به‌دست آورید.

حل.

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i \log i} = e^{i\left(\ln 1 + (2k\pi + \frac{\pi}{2})i\right)} \\ &= e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}, \quad k = \circ, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{aligned}$$

درنتیجه مقدار اصلی به ازای $k = \circ$ به‌دست می‌آید. پس

$$\text{مقدار اصلی } i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

تمرین ۵.۱

۱. کلیه مقادیر و مقدار اصلی $(\sqrt{۳}+i)^{۱-i}$ را مشخص کنید.

۲. کلیه مقادیر و مقدار اصلی $(۱-i)^{۱+i}$ را مشخص کنید.

۳. معادلات زیر را حل کنید.

الف: $\sinh z = ۳ - ۳i$

ب: $\cosh^{۲} z = ۱ - i$

فصل ۲

انتگرال مختلط

در این فصل به معرفی انتگرال تابع مختلط و بررسی خواص آن می پردازیم. این کار با استفاده از انتگرال روی منحنی در داخل صفحه انجام می‌پذیرد. با استفاده از آن نشان خواهیم داد هر تابع تحلیلی نه تنها بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است بلکه دارای بسط تیلر نیز می‌باشد. با استفاده از این نتایج محاسبه انتگرال‌های معین پیچیده حقیقی به‌سادگی و می‌توان گفت در حد انجام محاسبات چهار عمل اصلی قابل انجام است. مثلاً انتگرال‌های زیر به‌سادگی قابل محاسبه است.

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sin x}{۴+\sin x}\,dx \quad , \quad \int_{۰}^{\infty} \frac{\cos x}{۱+x^{۲}}\,dx \quad , \quad \int_{۰}^{\infty} \frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\,dx$$

در بخش ۱.۲ به‌معرفی انتگرال مختلط و خواص مقدماتی آن می‌پردازیم. همچنین قضیه کشی-گورسا یا قضیه انتگرال کشی و نتایج آن را داریم. با نتایج حاصل محاسبه انتگرال‌های فوق مقدور می‌گردد. در بخش ۲.۲ با معرفی سری تیلر و لران محاسبه انتگرال‌ها را ساده‌تر خواهیم کرد. در بخش ۳.۲ با معرفی مانده و خواص آن کار محاسبات را در حد محاسبات چهار عمل اصلی تقلیل می‌دهیم.

۱.۲ انتگرال مختلط

برای معرفی انتگرال در ابتدا به یادآوری مفاهیمی از منحنی در صفحه می‌پردازیم. هر تابع پیوسته مانند $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ را یک منحنی در صفحه مختلط یا مختصراً یک منحنی گوییم. این منحنی را

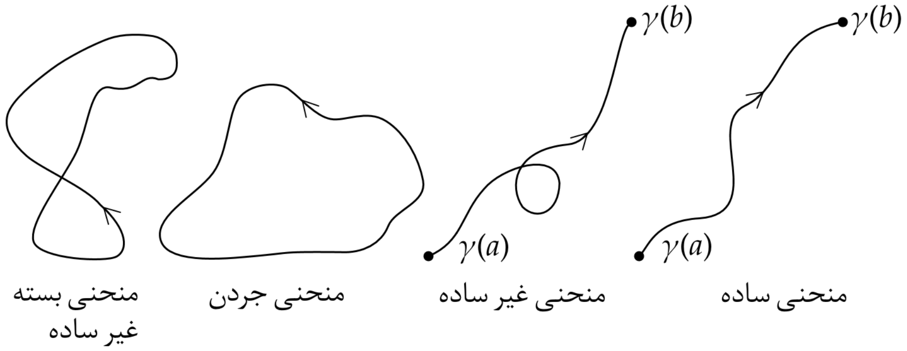
به‌صورت پارامتری زیر می‌توان نمایش داد.

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابع حقیقی از متغیر حقیقی t است.

مثال ۱.۲. منحنی $\gamma(t) = t + it^{۲}, -۱ \le t \le ۱$ همان منحنی $y = x^{۲}$ با دامنه $[-۱,۱]$ است.

منحنی $\gamma(t)$ را یک منحنی ساده گوییم اگر خودش را قطع نکند. این منحنی را بسته گوییم اگر نقاط ابتدا و انتهای آن بر هم منطبق باشد. یعنی $\gamma(a) = \gamma(b)$. منحنی بسته و ساده را منحنی جردن گویند. (شکل ۱.۲ را ببینید.) اگر طول منحنی متناهی باشد، آن را با طول متناهی گویند. جهت منحنی را جهت افزایش t بر روی آن می‌گیریم. جهت منحنی را جهت مثلثاتی روی دایره و در داخل آن می‌گیریم. این جهت را جهت مثبت منحنی جردن و خلاف آن را جهت منفی می‌دانیم.



شکل ۱.۲: انواع منحنی

انتگرال مختلط: فرض کنید $C : \gamma(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$ یک منحنی در صفحه و $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ یک تابع پیوسته با دامنه $D \subset \mathbb{C}$ باشد به‌طوری‌که منحنی C در داخل D واقع باشد. انتگرال f روی C را که با $\int_C f(x)\,dz$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy).$$

مثال ۲.۲. مطلوبست محاسبه $\int_C z^{۲}\,dz$ که در آن $C : \gamma(t) = t + it^{۲}, ۰ \le t \le ۱$.

حل.

$$\begin{aligned}\int_C z^2\,dz &= \int_C (x^2-y^2)\,dx-2xy\,dy+i\int_C 2xy\,dx+(x^2-y^2)\,dy\\ &= \int_0^1 (t^2-t^4)\,dt-2t\cdot t^2\cdot 2tdt+i\int_0^1 2t\cdot t^2\,dt+(t^2-t^4)\,2tdt\\ &= \left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}-4\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1+i\left(\frac{t^4}{2}+\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{3}\right)\Big|_0^1=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i.\end{aligned}$$

تذکر. ۱) برای بازنویسی تعریف فوق کافیست در $\int_C f(z)\,dz$ به‌جای $f(z)$ مقدار $u+iv$ و به‌جای dz مقدار $dx+idy$ را قرار دهیم و ساده کنیم. یعنی

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+iv)(dx+idy).$$

۲) در کتاب‌ها توابع مختلط معمولاً انتگرال مختلط را به‌صورت مجموع ریمان مشابه انتگرال روی منحنی تعریف می‌کنند و سپس به‌عنوان یک قضیه نشان می‌دهند. تعریف ما برقرار است. از آن‌جا که در این کتاب از مجموع ریمان در کاربرد استفاده نمی‌شود تعریف فوق برای کار ما کفایت می‌کند.

در زیر خواصی از انتگرال را می‌آوریم که برای انتگرال روی منحنی برقرار است. در این‌جا فرض بر این است که f و g توابع مختلط پیوسته و C_1 و C_2 و C منحنی‌های با طول متناهی هستند.

۱. از انتگرال روی منحنی داریم:

$$\int_C \big(f(z)+g(z)\big)\,dz=\int_C f(z)\,dz+\int_C g(z)\,dz.$$

۲. برای هر عدد مختلط α داریم:

$$\int_C \alpha f(z)\,dz=\alpha\int_C f(z)\,dz.$$

۳. اگر $-C$ منحنی C در جهت عکس باشد آن‌گاه:

$$\int_{-C} f(z)\,dz=-\int_C f(z)\,dz.$$

۴. اگر C_1 و C_2 دو منحنی در صفحه و ابتدای C_2 بر انتهای C_1 منطبق باشد آن‌گاه:

$$\int_{C_1\cup C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

۵. اگر منحنی $C:\gamma(t)=x(t)+iy(t),\ a\le t\le b$ دارای مشتق قطعه‌به‌قطعه پیوسته هموار باشد آن‌گاه:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

۶. اگر منحنی C دارای دو نوع نمایش پارامتری متفاوت مانند $\gamma_1(t)$ و $\gamma_2(t)$ باشد آن‌گاه:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)\,dt$$

یعنی مقدار انتگرال به‌نحوه پارامتری کردن منحنی C بستگی ندارد.

۷. اگر منحنی C دارای طولی برابر L و برای نقاط z روی منحنی C داشته باشیم $|f(z)|\le M$، M عددی ثابت، آن‌گاه

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML.$$

۸. فرض کنید f و f' روی D پیوسته و $C:\gamma(t),\ a\le t\le b$ با $\gamma'(t)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته در داخل D باشد، آن‌گاه

$$\int_C f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

نکته. این خاصیت را می‌توان تعمیمی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال دانست.

مثال ۲.۳. مطلوبست محاسبه $\int_C z^2\,dz$، وقتی $C:\gamma(t)=t+it^2,\ 0\le t\le 1$.

حل. روش اوّل: با توجه به ویژگی ۵ فوق می‌نویسیم:

$$\int_C z^2\,dz = \int_0^1 (t+it^2)^2(1+2it)\,dt = \frac{1}{3}(t+it^2)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1+i)^3.$$

روش دوم: با استفاده از ویژگی ۸ فوق می‌نویسیم:

$$\int_C z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big|_{\gamma(1)} - \frac{z^3}{3}\Big|_{\gamma(0)} = \frac{(1+i)^3}{3}.$$

برای این انتگرال داریم $M \geq ۲$ و $L = \sqrt{۲}$. پس

$$\left|\int_C z^{۲}\, dz\right| \leq M\cdot L = ۲\sqrt{۲}$$

لیکن:

$$\left|\frac{۱}{۳}(۱+i)^{۳}\right| = \frac{۱}{۳}|۱+i|^{۳} = \frac{۱}{۳}۲\sqrt{۲}.$$

اکنون به بیان قضیه انتگرال کشی که به قضیه کشی-گورسا نیز شهرت دارد می‌پردازیم. این قضیه که همان قضیه گرین برای توابع مختلط است اساس نظریه توابع مختلط است اگرچه کاربرد محاسبه مستقیم ندارد. برای بیان علت صحت این قضیه از قضیه گرین استفاده خواهیم کرد که در ابتدا می‌آوریم.

قضیه ۱.۲ (گرین). فرض کنید C یک منحنی جردن و $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دو تابع حقیقی باشند که C و داخل آن در دامنه این دو تابع قرار دارد. اگر P و Q دارای مشتقات مرتبه اوّل پیوسته باشند، آن‌گاه

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\text{داخل } C} (Q_x - P_y)\,dxdy.$$

خاصیت ۲.۲ (قضیه انتگرال کشی). فرض کنید f تابعی تحلیلی روی میدان D و C یک منحنی جردن باشد که هم خودش و هم داخل آن در D واقع است. آن‌گاه

$$\oint_C f(z)\,dz = ۰.$$

علت. (اگر f' پیوسته نیز باشد) با استفاده از قضیه گرین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy\\ &= \iint_{\text{داخل } C} (-v_x - u_y)\,dxdy + i\iint_{\text{داخل } C} (u_x - v_y)\,dxdy.\end{aligned}$$

چون f تحلیلی است پس روابط کشی-ریمان برقرار است. یعنی $u_x - v_y = ۰$ و $-v_x - u_y = ۰$ پس $\oint_C f(z)\,dz = ۰$.

تذکر. ۱) کشی با فرض پیوستگی $f'(z)$ اثبات فوق را ارائه نمود. لیکن مشتق توابع لزوماً پیوسته نیستند. این فرض هم‌ارز اهمیت این قضیه می‌باشد. گورسا بعد از چهار دهه اثباتی بدون فرض پیوستگی $f'(z)$ ارائه داد و با استفاده از آن نشان داد $f'(z)$ هم پیوسته است.

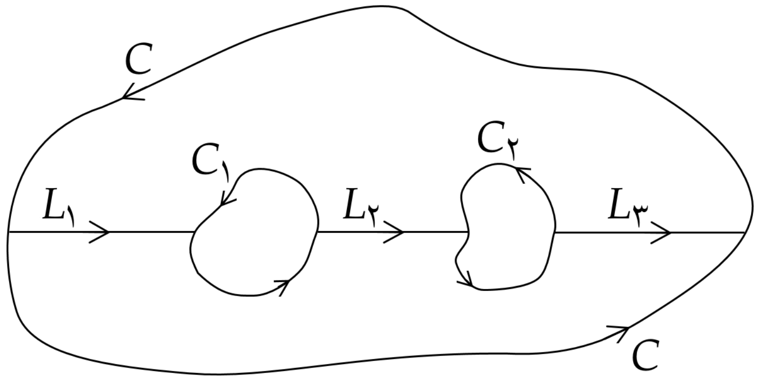
۲) اگر C یک منحنی بسته با طول متناهی باشد باز هم قضیه انتگرال کشی صحیح است.

خاصیت زیر کمک می‌کند تا از قضیه انتگرال کشی به فرمول انتگرال کشی برسیم.

خاصیت ۳.۲. فرض C یک منحنی جردن و C_1 تا C_n، n تا منحنی جردن جدا از هم در داخل C باشد. همچنین فرض کنید تا f روی این منحنی‌ها و بین آن‌ها تحلیلی است. آن‌گاه

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz.$$

علت. علت را برای $n = 2$ بررسی می‌کنیم. حالت کلی مشابه است. از یک نقطه C به یک نقطه C_1 و از یک نقطه دیگر C_1 به C_2 و از یک نقطه C_2 به یک نقطه C مطابق شکل وصل کنید. این خطوط واصل را L_1، L_2 و L_3 بنامید. (شکل ۲.۲ را ببینید.) لبه بالایی این منحنی‌ها را با علامت $+$ و لبه پایینی را با علامت $-$ در نظر بگیرید و دو منحنی جردن به‌صورت زیر را بسازید.



شکل ۲.۲

$$K_1 = C^+ \cup L_1 \cup (-C_1^+) \cup L_2 \cup (-C_2^+) \cup L_3$$
$$K_2 = C^- \cup (-L_3) \cup (-C_2^-) \cup (-L_2) \cup (-C_1^-) \cup (-L_1).$$

طبق قضیه انتگرال کشی

$$\int_{K_1} f(z)\,dz = 0 \quad , \quad \int_{K_2} f(z)\,dz = 0$$

با باز کردن این انتگرال‌ها روی منحنی‌های تشکیل دهندهٔ K_1 و K_2 و جمع آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$\oint_C f(z)\,dz - \oint_{C_1} f(z)\,dz - \oint_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

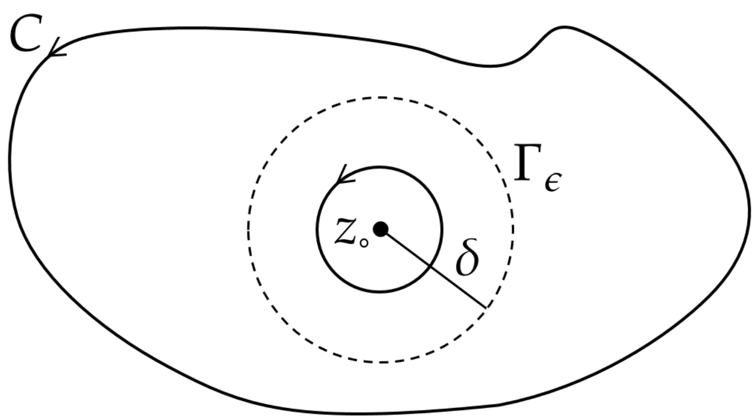
به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

اولین فرمول محاسباتی را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۴.۲ (فرمول انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن و $z_۰$ یک نقطه در داخل C و $f(z)$ تابعی تحلیلی روی C و داخل C باشد. آن‌گاه:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_۰}dz = ۲\pi i f(z_۰).$$

علت. برای $\epsilon > ۰$ داده شده $\delta > ۰$ را طوری بگیرید تا برای $|z-z_۰| < \delta$ داشته باشیم $|f(z)-f(z_۰)| < \epsilon$. حال Γ_ϵ را دایره به‌مرکز $z_۰$ وشعاع $r < \delta$ در نظر بگیرید. (شکل ۳.۲ را ببینید.)



شکل ۳.۲

طبق خاصیت ۳.۲ داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_۰}dz = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-z_۰}dz = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z_۰)}{z-z_۰}dz + \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}dz.$$

از طرف دیگر

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z_۰)}{z-z_۰}dz = f(z_۰)\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{۱}{z-z_۰}dz = f(z_۰)\int_۰^{۲\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = ۲\pi i f(z_۰)$$

و

$$\left|\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}dz\right| \leq \frac{\epsilon}{r}\cdot ۲\pi r = ۲\pi\epsilon.$$

به‌این‌ترتیب:

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_۰}dz - ۲\pi i f(z_۰)\right| = \left|\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)-f(z_۰)}{z-z_۰}dz\right| \leq ۲\pi\epsilon$$

چون این نامساوی برای کلیه مقادیر ϵ برقرار است. پس باید برابر صفر باشد یا

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0).$$

مثال ۴.۲. انتگرال $\oint_C \frac{e^{z^2}+z}{z-2}\,dz$ را روی منحنی $C: 9x^2+16y^2=144$ محاسبه کنید.

حل. منحنی C یک منحنی جردن و نقطه $z=2$ در داخل آن است. پس طبق فرمول انتگرال کشی

$$\oint_C \frac{e^{z^2}+z}{z-2}\,dz = 2\pi i(e^{z^2}+z)\Big|_{z=2} = 2\pi i(e^4+2).$$

از خاصیت زیر در محاسبات استفاده خواهد شد.

خاصیت ۵.۲. اگر C دایره به شعاع r و به مرکز z_0 باشد آن‌گاه

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

علت. داریم:

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0\leq\theta\leq 2\pi.$$

در این‌صورت

$$\oint_C (z-z_0)^n\,dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta}\, ire^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\,d\theta$$
$$= \begin{cases} i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i & n=-1 \\ ir^{n+1}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0 & n\neq -1. \end{cases}$$

خاصیت ۶.۲ (فرمول مشتق). فرض کنید C، z_0 و f مانند خاصیت ۴.۲ باشد در این‌صورت f در z_0 از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است و

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = 2\pi i\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

علت. فرمول انتگرال کشی را به‌صورت زیر داریم:

$$f(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_\circ}\,dz$$

$z_\circ$ را می‌توان به‌عنوان یک متغیر در داخل C محسوب کرد. تابع زیر انتگرال نسبت به $z_\circ$ مشتق‌پذیر است. پس جای مشتق نسبت به $z_\circ$ و انتگرال نسبت به z را می‌توان عوض کرد. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.

$$f'(z_\circ) = \frac{۱}{۲\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^۲}\,dz.$$

با استقرا

$$f^{(n)}(z_\circ) = \frac{n!}{۲\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}}\,dz.$$

نتیجه ۷.۲. هر تابع تحلیلی بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است. در نتیجه قسمت حقیقی و موهومی هر تابع تحلیلی، مشتقات پاره‌ای از هر مرتبه‌ای نسبت به x و y دارند.

مثال ۵.۲. مطلوبست محاسبه $\oint_C \frac{\sin ۲z}{z^۲}\,dz$ که در آن $C : ۹x^۲ + ۱۶y^۲ = ۱۴۴$.

حل. طبق فرمول مشتق

$$\oint_C \frac{\sin ۲z}{z^۲}\,dz = \frac{۲\pi i}{۱!}(\sin ۲z)'\Big|_{z=\circ} = ۲\pi i \cdot ۲\cos\circ = ۴\pi i.$$

در این‌جا می‌توانیم به محاسبه انتگرال‌های حقیقی بپردازیم.

مثال ۶.۲. مطلوبست محاسبه $\int_\circ^{۲\pi} \frac{۱}{۲+\cos\theta}\,d\theta$.

حل. ابتدا انتگرال را بر حسب $e^{i\theta}$ بنویسید و سپس بگیرید $z = e^{i\theta}$.

$$\int_\circ^{۲\pi} \frac{۱}{۲+\cos\theta}\,d\theta = \int_\circ^{۲\pi} \frac{۱}{۲+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{۲}}\,d\theta = \int_\circ^{۲\pi} \frac{۲e^{i\theta}}{e^{۲i\theta}+۴e^{i\theta}+۱}\,d\theta$$

$$z = e^{i\theta} \quad\Longrightarrow\quad dz = ie^{i\theta}d\theta$$

پس

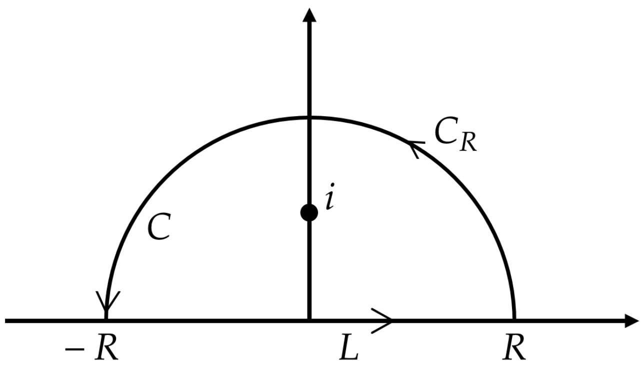
$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۲\pi}\frac{۱}{۲+\cos\theta}d\theta &= \oint_{|z|=۱}\frac{۲}{i}\frac{۱}{z^{۲}+۴z+۱}dz\\ &= \frac{۲}{i}\oint_{|z|=۱}\frac{۱}{(z+۲+\sqrt{۳})(z+۲-\sqrt{۳})}dz\\ &= \frac{۲}{i}\oint_{|z|=۱}\frac{\frac{۱}{z+۲+\sqrt{۳}}}{z+۲-\sqrt{۳}}dz = \frac{۲}{i}۲\pi i\frac{۱}{z+۲+\sqrt{۳}}\Big|_{z=-۲+\sqrt{۳}}\\ &= \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}.\end{aligned}$$

که در آخر از فرمول انتگرال کشی استفاده شده است.

تذکر. با این روش هر انتگرال مثلثاتی حاوی سینوس و کسینوس به انتگرال مختلط تبدیل و قابل محاسبه است.

مثال ۲.۷. مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{(۱+x^{۲})^{۵}}dx$.

حل. انتگرال $\oint_C \frac{۱}{(۱+z^{۲})^{۵}}dz$ را روی منحنی C زیر در جهت مثلثاتی در نظر بگیرید که در آن $C=C_R\cup L$. (به شکل ۴.۲ توجه کنید.) شعاع R را بزرگ‌تر از ۱ در نظر بگیرید تا نقطه i در داخل C



شکل ۴.۲: $C=C_R\cup L$

قرار گیرد. در این‌صورت

$$\oint_C\frac{۱}{(۱+z^{۲})^{۵}}dz=\oint_C\frac{(z+i)^{-۵}}{(z-i)^{۵}}dz$$

این انتگرال با فرمول مشتق تطبیق دارد.

$$f(z)=(z+i)^{-۵},\ \ n=۴,\ \ z_{۰}=i$$

پس

$$\oint_C \frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz = \frac{۲\pi i}{۴!}\frac{d^۴}{dz^۴}(z+i)^{-۵}\Big|_{z=i} = \frac{۲\pi i}{۴!}\frac{۸!}{۴!}(z+i)^{-۹}\Big|_{z=i}$$
$$= \frac{۲\pi i \cdot ۸!}{۴!۴!(۲i)^۹} = \frac{۲\pi \cdot ۸!}{۴!۴!۲^۹} = \frac{۳۵\pi}{۱۲۸}.$$

از طرف دیگر

$$\oint_C \frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz = \int_{-R}^{R}\frac{۱}{(۱+x^۲)^۵}dx + \int_{C_R}\frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz$$

و

$$\left|\int_{C_R}\frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz\right| \le \frac{۱}{(R^۲-۱)^۵}\cdot \pi R$$

پس وقتی‌که $R\to\infty$، $\int_{C_R}\frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz \to ۰$.

حال اگر در تساوی

$$\int_{-R}^{R}\frac{۱}{(۱+x^۲)^۵}dx + \int_{C_R}\frac{۱}{(۱+z^۲)^۵}dz = \frac{۳۵\pi}{۱۲۸}$$

$R\to\infty$ به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{۱}{(۱+x^۲)^۵}dx = \frac{۳۵\pi}{۱۲۸}.$$

مثال ۸.۲. مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ۲x}{۱+x^۲}dx$.

حل. برای این‌گونه انتگرال‌های ناسره منحنی C را مانند مثال قبل و $\oint_C \frac{e^{۲iz}}{۱+z^۲}dz$ را در نظر می‌گیریم. برای Rهای بزرگ i در داخل C قرار می‌گیرد و فرمول انتگرال کشی برای انتگرال زیر قابل اعمال است.

$$\oint_C \frac{e^{۲iz}}{۱+z^۲}dz = \oint_C \frac{\frac{e^{۲iz}}{z+i}}{z-i}dz = ۲\pi i\frac{e^{-۲}}{۲i} = \frac{\pi}{e^۲}.$$

از طرف دیگر

$$\oint_C \frac{e^{۲iz}}{۱+z^۲}dz = \int_{-R}^{R}\frac{e^{۲ix}}{۱+x^۲}dx + \int_{C_R}\frac{e^{۲iz}}{۱+z^۲}dz = \frac{\pi}{e^۲}.$$

حال اگر $R\to\infty$، در این‌صورت

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{۲iz}}{۱+z^۲}dz\right| \le \frac{\max_{y\in[۰,R]}e^{-۲y}}{R^۲-۱}\cdot \pi R = \frac{\pi R}{R^۲-۱} \to ۰.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e^2}$$

یا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e^2}.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e^2}.$$

تذکر. اگر $\cos 2x$ را به $\cos 2z$ تبدیل می‌کردیم انتگرال روی C_R به صفر همگرا نمی‌شد.

از فرمول مشتق نامساوی زیر حاصل می‌گردد که به نامساوی کشی مشهور است.

خاصیت ۸.۲ (نامساوی کشی). فرض کنید $f(z)$ روی دایره $|z-z_0| = r$ و داخل آن تحلیلی است و روی این دایره داریم $|f(z)| \le M$. آن‌گاه برای هر z_0 در داخل C و هر عدد طبیعی داریم.

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} M.$$

علت. بنابر فرمول مشتق داریم:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

پس

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi i}\left|\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r.$$

یا

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} M.$$

خاصیت ۹.۲ (قضیه لیوویل). هر تابع تام کران‌دار ثابت است.

علت. فرض کنید تابع f تام یا روی $\mathbb{C}$ تعریف شده و تحلیلی است. به‌علاوه دارای کران M است. یعنی برای هر $z \in \mathbb{C}$ داریم $|f(z)| \leq M$. حال اگر f را روی دایره $|z - z_0| = r$ در نظر بگیریم. طبق خاصیت قبلی برای z_0 در داخل این دایره داریم.

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}.$$

چون این نامساوی برای هر $r > 0$ برقرار است پس برای هر z_0، $|f'(z_0)| = 0$ یا $f'(z_0) = 0$ پس $f(z)$ ثابت است.

تذکر. ۱) با استفاده از قضیه لیوویل می‌توان نشان داد هر چندجمله‌ای از درجه n حداقل یک ریشه و در نهایت نشان داد دارای n ریشه است.

۲) می‌توان نشان داد قدر مطلق هر تابع تحلیلی مقدار ماگزیمم خود را روی مرز دامنه به‌خود می‌گیرد.

۳) عکس قضیه انتگرال کشی نیز صحت دارد و به قضیه مررا شهرت دارد.

۴) محاسبه انتگرال‌های حقیقی مشابه انتگرال‌هایی که در مثال‌ها آوردیم به‌صورت مشابه قابل محاسبه است لیکن ما دنبال محاسبه آسان‌تر هستیم. در بخش بعد سری‌ها را داریم و در بخش آخر تحت عنوان مانده، محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها را بسیار ساده خواهیم کرد.

تمرین ۱.۲

۱. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_{i+1}^{i-1} z e^{z^2}\, dz$

ب) $\int_0^{\pi} z \cos^2 z\, dz$

ج) $\int_i^1 z^2 e^{2z}\, dz$

د) $\int_{-i}^{i} z^2 \sinh 2z\, dz$

۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\oint_{|z|=۱} \frac{\cosh z}{z(z-۲)^۲}\, dz$

ب) $\oint_{|z|=۱} z^{-۳}(z^۲+z-۱)^۴\, dz$

ج) $\oint_{|z-۲i|=۱} \frac{\sin z}{z^۴+۴z^۲}\, dz$

د) $\oint_{|z|=۴} \frac{\cos z}{z^۲(z^۳+۸)}\, dz$

۳. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\oint_{|z|=\frac{\pi}{۴}} \sin \bar{z}\, dz$

ب) $\oint_{|z|=۳} (z^۲+z+۱)\, d\bar{z}$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\oint_{|z|=۲} \frac{۱}{|z-۱|^۲}\, dz$

ب) $\oint_{|z-۲|=۱} \frac{\operatorname{Log} z}{z^۴}\, dz$

ج) $\oint_{|z|=۱} (z+\bar{z})^{۲۰}\, dz$

د) $\oint_{|z-۱|=۱} \left(\frac{\bar{z}}{z-۱}\right)^{۱۰} dz$

۵. انتگرال‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_۰^{۲\pi} \frac{۱}{۲+\sin ۲\theta}\, d\theta$

ب) $\int_۰^{\pi} \frac{\cos\theta}{۳+\cos\theta}\, d\theta$

ج) $\int_۰^{۲\pi} \sin^{۳۲}\theta\, d\theta$

د) $\int_۰^{\pi} \frac{\sin^۲\theta}{۲+\cos\theta}\, d\theta$

۶. انتگرال‌های حقیقی زیر را حساب کنید.

آ) $\int_۰^{\infty} \frac{x^۲+۱}{(x^۲+۴)^۲}\, dx$

ب) $\int_۰^{\infty} \frac{۱}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)^۲}\, dx$

ج) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(x^۲+۲x+۴)^۲}\, dx$

د) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{x^۲+x+۱}\, dx$

۷. مطلوبست محاسبه انتگرال‌های ناسره زیر

آ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۳x}{(x^۲+۱)^۳}\, dx$

ب) $\int_۰^{\infty} \frac{x \sin ۲x}{(۱+x^۲)(۴+x^۲)}\, dx$

ج) $\int_۰^{\infty} \frac{x^۲ \sin^۲ x}{(۴+x^۲)^۲}\, dx$

د) $\int_۰^{\infty} \frac{\cos^۲ x}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}\, dx$

۲.۲ سری تیلر و سری لران

هدف از این بخش معرفی سری لران، بررسی خواص آن و استفاده از آن در محاسبه انتگرال‌های مختلط و به‌خصوص انتگرال‌های حقیقی است. برای این‌کار ضرورت دارد تا به بیان دنباله، سری، سری توانی وسری تیلر بپردازیم و در انتها به سری لران برسیم.

حد دنباله: می‌گوییم حد دنباله مختلط $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر z_0 است و می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ اگر $\lim_{n\to\infty}|z_n - z_0| = 0$. دنباله‌ای که همگرا نباشد را واگرا گوییم.

مثال ۹.۲. حد دنباله $\left\{\frac{in^2+2n-4+i}{(1+i)n^2-in+6}\right\}$ را بیابید.

حل. چنان‌چه i را یک پارامتر حقیقی منظور کنیم حد برابر $\frac{i}{i+1}$ می‌شود. حال آن را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{in^2+2n-4+i}{(1+i)n^2-in+6}-\frac{i}{i+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1+2i)n-9i-5}{(1+i)n^2-in+6}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n-5)^2+(2n-9)^2}{(n^2+6)^2+(n^2-n)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n-5}{n^2+6})^2+(\frac{2n-9}{n^2+6})^2}{1+(\frac{n^2-n}{n^2+i})^2}\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

پس مقدار حد برابر $\frac{i}{i+1}$ است.

خاصیت ۱۰.۲. فرض کنید $z_n = x_n + iy_n$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ باشد آن‌گاه $z_n \to z_0$ اگر و فقط اگر $x_n \to x_0$ و $y_n \to y_0$.

علت. از نامساوی مثلث داریم:

$$|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0|$$

پس اگر $x_n \to x_0$ و $y_n \to y_0$ آن‌گاه $z_n \to z_0$.

از طرف دیگر $|x_n - x_0| \le |z_n - z_0|$ و $|y_n - y_0| \le |z_n - z_0|$. پس اگر $z_n \to z_0$ آن‌گاه $x_n \to x_0$ و $y_n \to y_0$.

مثال ۱۰.۲. دنباله مثال قبلی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\frac{in^۲+۲n-۴+i}{(۱+i)n^۲-in+۶}=\frac{(۲n-۴)(n^۲+۶)+(n^۲-n)(n^۲+۱)}{(n^۲+۶)^۲+(n^۲-n)^۲}$$
$$+i\frac{(n^۲+۱)(n^۲+۶)-(۲n-۴)(n^۲-n)}{(n^۲+۶)^۲+(n^۲-n)^۲}.$$

حال اگر $n\to\infty$ بعد از تقسیم صورت و مخرج طرف دوم بر $n^۴$ و حدگیری از صورت و مخرج حد طرف دوم، به‌دست می‌آوریم $\frac{۱}{۲}+i\frac{۱}{۲}$ که برابر با $\frac{i}{۱+i}$ همان حد قبلی است.

تذکر. کلیه قواعد و فرمول‌های حد دنباله‌های حقیقی برای دنباله‌های مختلط هم برقرار است.

مثال ۱۱.۲. دنباله مثال قبلی را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{in^۲+۲n-۴+i}{(۱+i)n^۲-in+۶}=\lim_{n\to\infty}\frac{i+\frac{۲}{n}-\frac{۴}{n^۲}+\frac{i}{n^۲}}{۱+i-\frac{i}{n}+\frac{۶}{n^۲}}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(i+\frac{۲}{n}-\frac{۴}{n^۲}+\frac{i}{n^۲}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(۱+i-\frac{i}{n}+\frac{۶}{n^۲}\right)}=\frac{i}{۱+i}.$$

حد سری: می‌گوییم حد سری $\sum_{n=۰}^{\infty}d_n$ یا مقدار آن برابر با s است اگر حد دنباله $s_n=\sum_{k=۰}^{n}d_k$ که آن را مجموع جزئی این سری می‌نامیم برابر با s باشد.

خاصیت ۱۱.۲. فرض کنید $z_n=x_n+iy_n$ و $s=\alpha+i\beta$ است. $\sum_{n=۰}^{\infty}z_n=s$ اگر و فقط اگر $\sum_{n=۰}^{\infty}x_n=\alpha$ و $\sum_{n=۰}^{\infty}y_n=\beta$.

علت. بگیرید $s_n=\sum_{k=۰}^{n}z_k$، $\alpha_n=\sum_{k=۰}^{n}x_k$ و $\beta_n=\sum_{k=۰}^{n}y_k$. در این‌صورت $s_n=\alpha_n+i\beta_n$. طبق خاصیت ۱۰.۲

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\alpha_n+i\lim_{n\to\infty}\beta_n=\alpha+i\beta.$$

تذکر. ۱) کلیه خواص، قواعد و فرمول‌های سری حقیقی برای مختلط هم برقرار است. مثلاً اگر $\sum_{n=۰}^{\infty}z_n$ همگرا باشد آن‌گاه $z_n\to ۰$. همچنین هر سری مطلقاً همگرا یک سری همگرا است.

۲) سری که همگرا نباشد را واگرا گوییم.

سری توانی: سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ را یک سری توانی به مرکز z_0 و ضرایب a_n گویند.
خواص زیر در مورد سری توانی مختلط برقرار است که مشابه حقیقی است و علت آن‌ها نیز به‌صورت مشابه قابل بررسی است.

خاصیت ۱۲.۲. ۱) اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ برای z_1ی همگرا باشد برای هر z با $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ نیز همگرا است.

۲) اگر این سری برای z_2 واگرا باشد، این سری برای هر z با $|z-z_0| > |z_2-z_0|$ واگرا است.

۳) فرض کنید سری توانی حداقل به‌ازای یک $z \neq z_0$ همگرا باشد. در این‌صورت، عددی مانند $0 < R \leq \infty$ موجود است به‌طوری‌که برای z با $|z-z_0| < R$ این سری همگرا و برای z با $|z-z_0| > R$ واگرا است. عدد R را شعاع همگرایی سری و دیسک $|z-z_0| < R$ را میدان همگرایی سری گویند.

۴) شعاع همگرایی R، از فرمول زیر که به فرمول هادامارد مشهور است (مشروط به وجود حد) قابل حصول است.

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

۵) از سری توانی می‌توان جمله‌به‌جمله مشتق و انتگرال گرفت. یعنی اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ باشد آن‌گاه $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ و $\int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$

۶) برای $|z| < 1$، $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. این سری توانی را سری هندسی مختلط یا مختصراً سری هندسی گویند. سری هندسی برای $|z| > 1$ واگرا است.

اکنون شرایط معرفی سری تیلر را داریم.

خاصیت ۱۳.۲ (بسط تیلر). فرض کنید تابع $f(z)$ روی دیسک $|z-z_0| < R$ تحلیلی باشد آن‌گاه روی این دیسک $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$.

علت. فرض کنید $0 < \rho < R$ یک عدد ثابت باشد. برای z معین با $|z-z_0| < \rho$ و ξ با $|\xi-z_0| = \rho$ با توجه به سری هندسی می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین تساوی در $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$ و انتگرال‌گیری روی $|\xi - z_0| = \rho$ با توجه به فرمول انتگرال کشی می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi - z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

که البته در تساوی آخر از فرمول مشتق یعنی خاصیت ۶.۲ نیز استفاده شده است. حال، چون این تساوی فوق برای هر z با $|z - z_0| < \rho$ برقرار است و عدد ρ هر مقدار دلخواه به‌صورت $0 < \rho < R$ می‌باشد، پس تساوی فوق برای هر z در دیسک $|z - z_0| < R$ نیز برقرار می‌باشد.

تذکر. ۱) سری فوق را سری تیلر f حول نقطه z_0 یا بسط تیلر f حول نقطه z_0 گویند.

۲) شعاع همگرائی سری تیلر برابر با فاصله z_0 تا نزدیکترین نقطه تکین (نقطه غیر تحلیلی) f است.

۳) اگر $z_0 = 0$ سری تیلر را سری مک‌لورن گویند.

۴) سری مک‌لورن توابع مقدماتی حقیقی به همان صورت برای توابع مقدماتی مختلط هم برقرار است.

۵) برای محاسبه سری تیلر یک تابع حتی‌المقدور می‌بایستی از بسط مک‌لورن توابع مقدماتی و خواص سری‌های توانی استفاده نمود.

مثال ۱۲.۲. بسط مک‌لورن تابع $f(z) = z^{20}e^{z^{20}}$ را به‌دست آورید.

حل. اگر بخواهیم با محاسبه مشتقات تابع این بسط را بنویسیم می‌شود گفت کاری طاقت‌فرسا و تقریباً ناممکن است. برای آن از تذکر فوق استفاده می‌کنیم. برای $w \in \mathbb{C}$ داریم:

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}.$$

پس این تساوی برای هر تابعی که به‌جای w قرار دهیم برقرار است. پس

$$e^{z^{20}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{20n}}{n!}.$$

حال طرفین تساوی را در z^{20} ضرب کنیم:

$$f(z) = z^{20}e^{z^{20}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{20(n+1)}}{n!} = z^{20} + \frac{z^{40}}{1!} + \frac{z^{60}}{2!} + \cdots.$$

مثال ۱۳.۲ سری مک‌لورن تابع $f(z)=\frac{z^۲+۱}{(z^۴+۱)^۲}$ را به‌دست آورید.

حل. برای حل این مسئله از سری هندسی کمک می‌گیریم.

$$\frac{۱}{۱-w}=\sum_{n=۰}^{\infty} w^n, \qquad |w|<۱.$$

از طرفین مشتق بگیرید:

$$\frac{۱}{(۱-w)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} n w^{n-۱}$$

حال در طرفین تساوی w را با $-z^۴$ جایگزین کنید تا به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{(۱+z^۴)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} n(-۱)^{n-۱} z^{۴(n-۱)}.$$

در $z^۲$ ضرب کنیم

$$\frac{z^۲}{(۱+z^۴)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} n(-۱)^{n-۱} z^{۴(n-۱)+۲}.$$

حال با سری قبلی جمع کنیم:

$$\frac{z^۲+۱}{(۱+z^۴)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} n(-۱)^{n-۱} z^{۴(n-۱)+۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} n(-۱)^{n-۱} z^{۴(n-۱)}.$$

حال می‌بایستی دو سری را با هم جمع کنیم. ابتدا می‌بایستی با تغییر اندیس توان‌ها را یکسان کنیم تا به‌دست آوریم.

$$f(z)=\frac{z^۲+۱}{(۱+z^۴)^۲}=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^{۲n}.$$

که در آن

$$a_n=\begin{cases}(-۱)^{\frac{n-۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۴}n+\frac{۱}{۲}\right) & n=۱,۳,۵,\cdots,(۲k+۱),\cdots\\ (-۱)^{\frac{n}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}n+۱\right) & n=۰,۲,۴,\cdots,۲k,\cdots.\end{cases}$$

حال به معرفی سری لران می‌پردازیم که با سری تیلر ارتباطی ندارد.

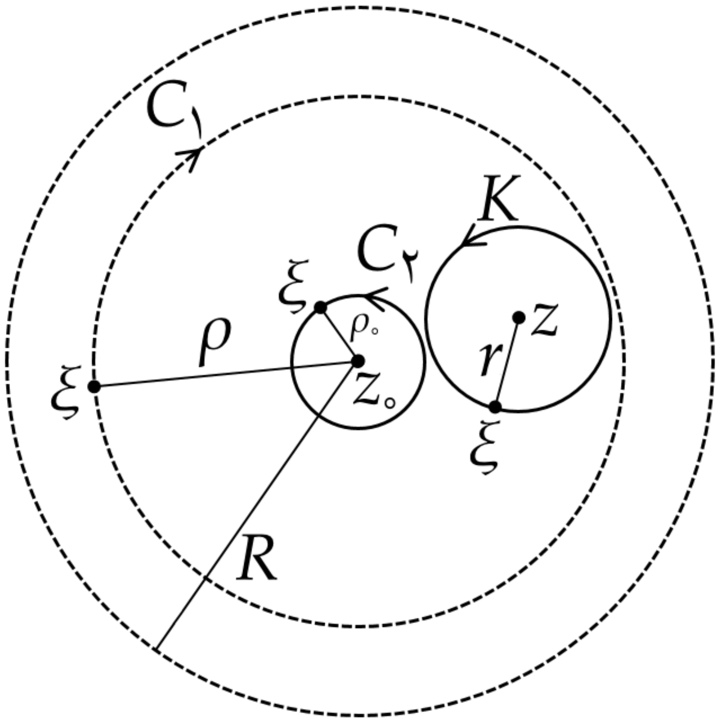
خاصیت ۱۴.۲ (بسط لران). فرض کنید $z_\circ$ یک نقطه تکین (نقطه غیر تحلیلی) $f(z)$ و f روی $\circ < |z - z_\circ| < R$، برای $R > \circ$ای تحلیلی است. در این‌صورت برای هر z با $\circ < |z - z_\circ| < R$ داریم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_\circ)^n, \qquad a_n = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_\circ)^{n+۱}} dz.$$

که در آن منحنی C عبارت است از $|z - z_\circ| = \frac{۱}{۲}R$.

تذکر. می‌توان نسخه‌ای از خاصیت فوق را برای میدان‌هایی به‌صورت یک طوق $\rho < |z - z_\circ| < R$ که f روی آن تحلیلی باشد نیز تنظیم کرد. در این حالت منحنی C را می‌توان $|z - z_\circ| = \frac{\rho + R}{۲}$ اختیار کرد.

علت. فرض کنید z نقطه‌ای معین از میدان $\circ < |z - z_\circ| < R$ باشد. حال بگیرید $\rho = \frac{۱}{۲}(|z| + R)$. همچنین r را به‌قدری کوچک بگیرید تا دیسک $|\xi - z| \leq r$ در داخل میدان $\circ < |\xi - z_\circ| < \rho$ قرار گیرد. همچنین $\rho_\circ$ را هم به‌قدری کوچک انتخاب کنید تا دیسک $|\xi - z_\circ| \leq \rho_\circ$ در داخل $|\xi - z_\circ| < \rho$ و جدا از دیسک $|\xi - z| \leq r$ قرار گیرد. (به شکل ۵.۲ توجه کنید.)



شکل ۵.۲

برای سادگی در نوشتن می‌گیریم:

$$C_۱ : |\xi - z_\circ| = \rho \quad , \quad C_۲ : |\xi - z_\circ| = \rho_\circ \quad , \quad K : |\xi - z| = r$$

در این‌صورت تابع $\frac{f(\xi)}{\xi-z}$ برای متغیر ξ و z معین فوق روی منحنی‌های C_1، C_2 و K و همچنین بین آن‌ها تحلیلی است. پس

$$\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint_{K}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$
$$=\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+2\pi i f(z)$$

یا

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

برای $\xi\in C_1$ داریم:

$$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$$

پس مشابه بسط تیلر برای $z\in C_1$ می‌نویسیم

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین این تساوی در $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ و انتگرال‌گیری روی C_1 به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right](z-z_0)^n.$$

برای $\xi\in C_2$ داریم:

$$\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|<1$$

پس در این حالت

$$-\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

از ضرب طرفین تساوی در $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ و انتگرال‌گیری روی C_2 به‌دست می‌آوریم.

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-n}}d\xi\right](z-z_0)^{-n-1}$$
$$=\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{m+1}}d\xi\right](z-z_0)^m.$$

که تساوی اخیر با تغییر اندیس $n+1=-m$ یا $m=-n-1$ صورت گرفته است. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

که در آن

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,1,2,\cdots$$
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n=-1,-2,\cdots.$$

چون بین $|\xi-z_0|\leq\rho$ و $|\xi-z_0|\leq\rho$ تابع $\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ تحلیلی است و $|\xi-z_0|=\frac{1}{2}R$ در این ناحیه قرار دارد. پس می‌توان دو فرمول فوق را برای a_n به یک فرمول زیر تقلیل داد.

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

حال با تغییر متغیر ξ به z به‌دست می‌آوریم:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

و به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌گردد.

نکته. توجه کنید $f(\xi)$ در z_0 تحلیلی نیست پس $f^{(n)}(z_0)$ موجود نیست و a_n نمی‌تواند برابر $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ باشد.

تذکر. ۱) سری فوق را سری لران f یا بسط لران f حول نقطه z_0 گویند.

۲) شعاع همگرائی این سری برابر با فاصله نقطه تکین z_0 تا نزدیک‌ترین نقطه تکین دیگر تابع f است.

۳) محاسبه ضرایب a_n با استفاده از فرمول‌های فوق پیچیده است و هدف از بسط لران این است که این بسط را از طریق دیگر محاسبه کنیم و با استفاده از آنها این ضرایب را که انتگرال‌های مختلط است معین کنیم.

۴) محاسبه سری لران همانند سری تیلر با استفاده از بسط مک‌لورن توابع مقدماتی و خواص بخصوص سری‌های توانی مقدور است.

مثال ۲.۱۴. بسط لران تابع $f(z)=z^5e^{\frac{1}{z}}$ را حول نقطه تکین آن به‌دست آورید. همچنین $\oint_{|z|=1}z^5e^{\frac{1}{z}}dz$ را نیز محاسبه کنید.

حل. برای حل این مسئله از بسط مک‌لورن $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ استفاده می‌کنیم. در این‌صورت

$$f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}} = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n}$$

چون از سری توانی می‌توان جمله‌به‌جمله انتگرال گرفت، پس

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \oint_{|z|=1} z^{5-n}\, dz = \frac{2\pi i}{6!}.$$

تساوی آخر با استفاده از خاصیت ۵.۲ بیان شده است.

نکته. محاسبه این انتگرال با استفاده از فرمول انتگرال کشی یا فرمول مشتق میسر نبود، لیکن با تغییر متغیر $w = \frac{1}{z}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\oint_{|z|=1} z^5 e^{\frac{1}{z}}\, dz = -\oint_{|w|=1} \frac{e^w}{w^5} \frac{-dw}{w^2} = +\oint_{|w|=1} \frac{e^w}{w^7}\, dw$$
$$= \frac{2\pi i}{6!} \cdot \frac{d^6 e^w}{dw^6}\bigg|_{w=0} = \frac{2\pi i}{6!}.$$

خاصیت ۱۵.۲. فرض کنید z_0 یک نقطه تکین $f(z)$ و $f(z)$ روی ناحیه $0 < |z - z_0| \leq R$ تحلیلی باشد. در این‌صورت:

$$\oint_{|z-z_0|=R} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$$

علت. روی این ناحیه بسط لران $f(z)$ را به‌صورت زیر داریم.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حال از طرفین روی $|z - z_0| = R$ انتگرال بگیرید تا با توجه به خاصیت ۵.۲ به‌دست آورید:

$$\oint_{|z-z_0|=R} f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}$$

تذکر. توجه کنید طبق این خاصیت کلیه ضرایب a_n در بسط لران f حول نقطه z_0 غیر از a_{-1} در مقدار انتگرال فوق بی‌اثراند و تنها اثر a_{-1} در این محاسبه ماندگار است. با توجه به این مطلب تعریف زیر اهمیت خاص دارد.

تعریف ۱.۲ (مانده). ضریب a_{-1} را در بسط لران f حول نقطه z_0 مانده f در z_0 گویند و با $\operatorname{Res}(f, z_0)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱۵.۲. مطلوبست محاسبه $\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}\, d\theta$.

حل. از قرار دادن $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} e^{z+\frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{z+\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}e^{z+\frac{1}{z}}, 0\right).$$

برای محاسبه این مانده می‌بایستی ضریب $\frac{1}{z}$ را در بسط لران این تابع به‌دست آورد. این ضریب برابر با ضریب مقدار ثابت یا ضریب z^0 در بسط لران $e^{z+\frac{1}{z}}$ است. آن را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m!}\right) \\ &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z^{-1}}{1!} + \frac{z^{-2}}{2!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

پس برای هر $n = m$ یک جمله z^0 داریم. در نتیجه $a_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ و

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}\, d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

نکته. توجه کنید محاسبه انتگرال مثال فوق با استفاده از فرمول مشتق نیز مقدور است.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{2\cos\theta}\, d\theta &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^{z+\frac{1}{z}}\, dz = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} e^z e^{\frac{1}{z}}\, dz \\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right) dz = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz \\ &= \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{2\pi i}{n!} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}. \end{aligned}$$

تمرین ۲.۲

۱. بسط مک‌لورن توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(z)=\frac{۱}{۱+z^{۴}}$

ب) $f(z)=\frac{۱}{(۴+z^{۲})^{۲}}$

ج) $f(z)=\frac{۱}{(۱+z)^{۴}}$

د) $f(z)=\frac{۱}{(۲+۴z^{۲})^{۳}}$

۲. بسط مک‌لورن توابع زیر را بنویسید.

آ) $f(z)=e^{z}\sin z$

ب) $f(z)=e^{z^{۲}+۲z}$

ج) $f(z)=\sin^{۲} z^{۳}$

د) $f(z)=\int_{۰}^{z}\sin t^{۴}\,dt$

۳. بسط تیلر توابع زیر را حول $z_{۰}=۱$ به‌دست آورید.

آ) $f(z)=\frac{۱}{z^{۲}}$

ب) $f(z)=e^{z^{۲}}$

ج) $f(z)=z^{۲}e^{z}$

د) $f(z)=\frac{z^{۲}+z+۱}{z^{۳}+z^{۲}-z}$

۴. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات به‌دست آورید.

آ) $f(z)=\frac{۱}{z^{۴}(۱+z^{۲})}$

ب) $f(z)=\frac{۴z+۱}{z^{۱۰}+z^{۵}}$

ج) $f(z)=\frac{۴z+۱}{(z^{۲}-z)^{۲}}$

د) $f(z)=\frac{۴z^{۲}+۳}{z^{۲}-۴z}$

۵. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات به‌دست آورید.

آ) $f(z)=z^{۴}\sin\frac{۱}{z^{۲}}$

ب) $f(z)=e^{z}\cos\frac{۱}{z}$

ج) $f(z)=z^{۲}\tan\frac{۱}{z}$

د) $f(z)=\coth z$

۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\oint_{|z|=۱} z^{۲}\tan\frac{۱}{z}\,dz$

ب) $\oint_{|z|=۱} e^{x}\,dz$

ج) $\int_{۰}^{۲\pi} e^{۲\sin\theta}\,d\theta$

د) $\int_{۰}^{۲\pi}\sin(\cos\theta)\,d\theta$

۳.۲ مانده و انتگرال‌های حقیقی

در بخش گذشته با استفاده از بسط لران تابع f حول نقطه تکین $z_\circ$ یعنی

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_\circ)^n,\qquad \circ<|z-z_\circ|<R$$

مانده f در نقطه $z_\circ$ را تعریف کردیم و با $\operatorname{Res}(f,z_\circ)$ نشان دادیم که برابر $a_{-۱}$ در بسط فوق است. همچنین نشان دادیم اگر $\circ<r<R$ باشد در این‌صورت

$$\oint_{|z-z_\circ|=r}f(z)\,dz=۲\pi i\operatorname{Res}(f,z_\circ)=۲\pi i a_{-۱}$$

پس برای محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها نیاز به محاسبه کامل سری لران نیست. فقط کافیست $a_{-۱}$ یا مانده را به‌دست آوریم. هدف از این بخش این است که روش‌هائی را برای محاسبه مانده ارائه دهیم. همچنین در بخش‌های گذشته دیدیم که با تبدیل انتگرال‌های حقیقی به انتگرال‌های مختلط محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها مقدور است. هدف دیگر این بخش این است که مقدار این‌گونه انتگرال‌های حقیقی را بر حسب مانده بیان کنیم. خواهیم دید با انجام این دو کار محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها تا حد عملیات چهار عمل اصلی حساب تقلیل می‌یابد. در ابتدا قضیه مانده را داریم که محاسبه انتگرال‌های مختلط را آسان می‌کند.

خاصیت ۱۶.۲ (قضیه مانده). فرض کنید C یک منحنی جردن و $z_۱$ تا z_n، n نقطه در داخل آن و تابع $f(z)$ روی و داخل به‌جز در نقاط $z_\circ$ تا z_n که نقاط تکین f هستند تحلیلی است. آن‌گاه

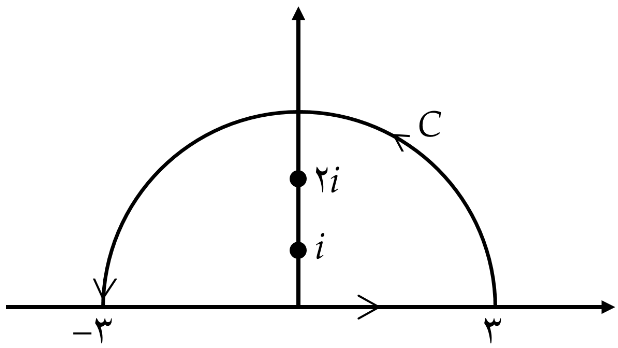
$$\oint_C f(z)\,dz=۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k).$$

علت. دایره‌های C_k به‌مرکز z_k و شعاع r_k کوچک، $k=۱,۲,\cdots,n$، را طوری انتخاب کنید تا این n دیسک در داخل C و کاملاً جدا از هم باشند. در این‌صورت طبق خاصیت ۳.۲ می‌توان نوشت:

$$\oint_C f(z)\,dz=\sum_{k=۱}^{n}\oint_{C_k}f(z)\,dz=۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k).$$

که تساوی اخیر را با توجه به خاصیت ۱۵.۲ نوشته‌ایم.

مثال ۱۶.۲. مطلوبست محاسبه انتگرال $\oint_C \frac{۱}{(z^۲+۱)(z^۲+۴)}\,dz$ که در آن C منحنی زیر است.



شکل ۶.۲

حل. نقاط تکین تابع در داخل C عبارتند از i و $۲i$. پس طبق قضیه مانده

$$\oint_C \frac{۱}{(۱+z^۲)(۴+z^۲)}dz = ۲\pi i\Big(\operatorname{Res}(f,i)+\operatorname{Res}(f,۲i)\Big).$$

محاسبه سری لران تابع $\frac{۱}{(۱+z^۲)(۴+z^۲)}$ حول نقطه i و $۲i$ چندان ساده نیست. برای محاسبه انتگرال ابتدا تغییراتی در انتگرال می‌دهیم.

$$\frac{۱}{(۱+z^۲)(۴+z^۲)} = \frac{۱}{۳}\frac{۱}{۱+z^۲} - \frac{۱}{۳}\frac{۱}{۴+z^۲}.$$

پس

$$\oint_C \frac{۱}{(۱+z^۲)(۴+z^۲)}dz = \frac{۱}{۳}\oint_{|z-i|=r_۱}\frac{۱}{۱+z^۲}dz - \frac{۱}{۳}\oint_{|z-۲i|=r_۲}\frac{۱}{۴+z^۲}dz$$
$$= \frac{۲\pi i}{۳}\operatorname{Res}\Big(\frac{۱}{۱+z^۲},i\Big) - \frac{۲\pi i}{۳}\operatorname{Res}\Big(\frac{۱}{۴+z^۲},۲i\Big).$$

محاسبه سری لران برای این دو تابع آسان‌تر است.

$$\frac{۱}{۱+z^۲} = \frac{۱}{z-i}\cdot\frac{۱}{z+i} = \frac{۱}{z-i}\cdot\frac{۱}{(z-i)+۲i} = \frac{۱}{z-i}\cdot\frac{۱}{۲i}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{z-i}{۲i}}$$
$$= \frac{۱}{۲i}\cdot\frac{۱}{z-i}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\Big(\frac{z-i}{۲i}\Big)^n = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۲i)^{n+۱}}(z-i)^{n-۱}.$$

پس

$$\operatorname{Res}\Big(\frac{۱}{۱+z^۲},i\Big) = \frac{۱}{۲i}.$$

$$\frac{۱}{۴+z^۲} = \frac{۱}{z-۲i}\cdot\frac{۱}{z+۲i} = \frac{۱}{z-۲i}\cdot\frac{۱}{(z-۲i)+۴i} = \frac{۱}{۴i}\cdot\frac{۱}{z-۲i}\cdot\frac{۱}{۱+\frac{z-۲i}{۴i}}$$
$$= \frac{۱}{۴i}\cdot\frac{۱}{z-۲i}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\Big(\frac{z-۲i}{۴i}\Big)^n = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n}{(۴i)^{n+۱}}(z-۲i)^{n-۱}.$$

پس
$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{4+z^2}, 2i\right) = \frac{1}{4i}.$$
به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.
$$\oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)}\,dz = \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{2i} - \frac{2\pi i}{3}\frac{1}{4i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

نکته. توجه کنید این انتگرال با استفاده از فرمول انتگرال کشی به‌مراتب آسان‌تر قابل محاسبه است. چون
$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)}\,dz &= \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}}{z-i}\,dz + \oint_{|z-2i|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}}{z-2i}\,dz\\ &= \frac{2\pi i}{(z+i)(z^2+4)}\Big|_{z=i} + \frac{2\pi i}{(z^2+1)(z+2i)}\Big|_{z=2i}\\ &= \frac{2\pi i}{6i} + \frac{2\pi i}{-12i} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$
لیکن با روش محاسبه مانده که در زیر می‌آید حل این مسئله با استفاده از مانده آسان‌تر می‌شود.

قطب مرتبه m: اگر در بسط لران f حول نقطه تکین z_0 برای $m > 0$، $a_{-m} \neq 0$ و $a_n = 0$ برای $n < -m$. در این‌صورت z_0 را یک قطب از مرتبه mام تابع f گویند. قطب مرتبه اوّل را قطب ساده گویند.

در این حالت بسط لران f را حول z_0 به‌صورت زیر داریم.
$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

تکین اساسی: اگر نقطه z_0 یک نقطه تکین غیر قطب باشد آن را نقطه تکین اساسی گویند.

محاسبه مانده با استفاده از خاصیتی که در زیر می‌آید، آسان می‌شود. قبل از آن خاصیت زیر را برای تشخیص قطب مرتبه m داریم.

خاصیت ۲.۱۷. فرض کنید $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$، $p(z)$ و $q(z)$ توابعی تحلیلی، $p(z_0) \neq 0$ و $q(z_0) = 0$، $q'(z_0) = 0$ تا $q^{(m-1)}(z_0) = 0$ و $q^m(z_0) \neq 0$. آن‌گاه z_0 یک ریشه از مرتبه mام $q(z)$ و یک قطب از مرتبه mام $f(z)$ است.

علت. تابع تحلیلی $q(z)$ در همسایگی نقطه $z_\circ$ دارای بسط تیلر زیر است.

$$\begin{aligned} q(z) &= a_m(z-z_\circ)^m + a_{m+1}(z-z_\circ)^{m+1} + a_{m+2}(z-z_\circ)^{m+2} + \cdots \\ &= (z-z_\circ)^m\Big[a_m + a_{m+1}(z-z_\circ) + a_{m+2}(z-z_\circ)^2 + \cdots\Big] \end{aligned}$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_\circ)^m}\cdot\frac{p(z)}{a_m + a_{m+1}(z-z_\circ) + a_{m+2}(z-z_\circ)^2 + \cdots} = \frac{g(z)}{(z-z_\circ)^m}$$

که در آن $g(z)$ در $z_\circ$ تابعی تحلیلی با $g(z_\circ) = \frac{p(z_\circ)}{a_m}$ می‌باشد. پس

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_\circ)^m}\left(\frac{p(z_\circ)}{a_m} + b_1(z-z_\circ) + b_2(z-z_\circ)^2 + \cdots\right).$$

پس $z_\circ$ یک قطب از مرتبه m است.

نتیجه ۱۸.۲. اگر در فوق $q(z)$ یک چندجمله‌ای و دارای فاکتور $(z-z_\circ)^m$ باشد. در این‌صورت $z_\circ$ یک قطب از مرتبه m است.

خاصیت ۱۹.۲ (محاسبه مانده). فرض کنید $z_\circ$ یک قطب تابع f است.

۱) اگر $z_\circ$ قطبی ساده باشد آن‌گاه

$$\operatorname{Res}(f, z_\circ) = \lim_{z\to z_\circ}(z-z_\circ)f(z).$$

۲) اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$، $p(z)$ و $q(z)$ تحلیلی و $p(z_\circ) \neq 0$ و $q(z_\circ) = 0$ و $q'(z_\circ) \neq 0$ باشد آن‌گاه

$$\operatorname{Res}(f, z_\circ) = \frac{p(z_\circ)}{q'(z_\circ)}.$$

۳) اگر $z_\circ$ یک قطب از مرتبه mام باشد

$$\operatorname{Res}(f, z_\circ) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_\circ}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_\circ)^m f(z).$$

علت. ۱) اگر $z_\circ$ قطب ساده باشد بسط لران f در $z_\circ$ به‌صورت زیر است:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_\circ} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n.$$

پس

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

۲) اگر $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ و z_0 قطب ساده باشد در این‌صورت

$$f(z)=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{p(z)}{q'(z_0)+q''(z_0)\frac{(z-z_0)}{2!}+\cdots}$$

پس

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

۳) اگر z_0 یک قطب از مرتبه m باشد. بسط لران f حول z_0 عبارتست از

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^m.$$

از ضرب طرفین این تساوی در $(z-z_0)^m$ به‌دست می‌آوریم:

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+m}.$$

با $(m-1)$بار مشتق‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)=(m-1)!a_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}a_n(z-z_0)^{n+1}$$

حال اگر $z\to z_0$ نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

تذکر. اگر z_0 یک نقطه تکین اساسی باشد مانده فقط با بسط لران قابل تعیین است.

مثال ۲.۱۷. مطلوبست محاسبه انتگرال مثال ۲.۱۶.

حل. داریم $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ و i و $2i$ نقاط تکین داخل C هستند. چون

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

هر دو قطب ساده‌اند. در نتیجه طبق ۱) خاصیت فوق

$$\operatorname{Res}(f,i)=\left.\frac{1}{(z+i)(z^2+4)}\right|_{z=i}=\frac{1}{6i}$$

و

$$\operatorname{Res}(f,2i)=\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}\Big|_{z=2i}=-\frac{1}{12i}.$$

پس طبق قضیه مانده

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

مثال ۱۸.۲. مطلوبست محاسبه $\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z\sin z}\,dz$.

حل. تنها نقطه تکین تابع زیر انتگرال فقط نقطه $z_0=0$ است. همچنین $z=0$ یک ریشه مرتبه اوّل $\sin z$ است. پس $z_0=0$ یک قطب مرتبه دوم است.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0)&=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{z+1}{z\sin z}\right)\\&=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z+1}{1-\frac{z^2}{3!}+\cdots}\qquad\text{(به‌جای سینوس بسط مک‌لورن قرار می‌دهیم)}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{1\cdot(1-\frac{z^3}{3!}+\cdots)-(-\frac{2}{3}z+\cdots)(z+1)}{(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots)^2}=1.\end{aligned}$$

پس

$$\oint_{|z|=1}\frac{z+1}{z\sin z}\,dz=2\pi i.$$

مثال ۱۹.۲. انتگرال زیر را حساب کنید.

$$\oint_{|z|=1} z^6\sin\bar{z}\,dz$$

حل. چون روی دایره $|z|=1$ داریم $z\bar{z}=1$ پس روی مسیر انتگرال‌گیری $\bar{z}=\frac{1}{z}$ و

$$\oint_{|z|=1} z^6\sin\bar{z}\,dz=\oint_{|z|=1} z^6\sin\frac{1}{z}\,dz.$$

نقطه $z_0=0$ تنها نقطه تکین تابع در داخل $|z|=1$ است و یک نقطه تکین اساسی است. پس برای تعیین مانده می‌بایستی از بسط لران استفاده کنیم. داریم:

$$\sin w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}w^{2n+1}$$

پس

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

در نتیجه

$$z^6\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{-2n+5}.$$

مانده برابر با ضریب a_{-1} است که برای $n=3$ به‌دست می‌آید.

$$\text{Res}\,(z^6\sin\frac{1}{z},0)=\frac{(-1)^3}{7!}=\frac{-1}{7!}.$$

در نتیجه:

$$\oint_{|z|=1}z^6\sin\bar{z}\,dz=2\pi i\text{Res}\,(z^6\sin\frac{1}{z},0)=-\frac{2\pi i}{7!}.$$

اکنون به بیان محاسبه انتگرال‌های حقیقی با استفاده از مانده می‌پردازیم.

خاصیت ۲.۲۰. فرض کنید $Q(x,y)$ تابعی دو متغیره حقیقی هموار باشد که روی دایره $x^2+y^2=1$ پیوسته است. اگر

$$f(z)=\frac{1}{iz}Q\left(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\right)$$

باشد، آن‌گاه

$$\int_0^{2\pi}Q(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\,(f,z_k)$$

که در آن z_1 تا z_k نقاط تکین f در داخل دایره واحد است.

علت. از قرار دادن

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\quad,\quad\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

در انتگرال فوق داریم:

$$\int_0^{2\pi}Q\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})ie^{i\theta}\,d\theta.$$

حال بگیرید $z = e^{i\theta}$ در این‌صورت $dz = ie^{i\theta}d\theta$ و

$$\int_{۰}^{۲\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=۱} f(z)\, dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

که z_kها نقاط تکین f در داخل دایره واحداند.

مثال ۲.۲۰. مطلوبست محاسبه

$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sin^{۲}\theta}{۲+\sin\theta}\, d\theta.$$

حل.

$$f(e^{i\theta}) = \frac{۱}{ie^{i\theta}} \cdot \frac{\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i}\right)^{۲}}{۲+\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{۲i}\right)} = -\frac{۱}{۲} \cdot \frac{e^{۲i\theta}+e^{-۲i\theta}-۲}{۴ie^{i\theta}+e^{۲i\theta}-۱}.$$

پس

$$f(z) = -\frac{۱}{۲} \cdot \frac{z^{۲}+z^{-۲}-۲}{z^{۲}+۴iz-۱} = -\frac{۱}{۲z^{۲}} \cdot \frac{z^{۴}-۲z^{۲}+۱}{z^{۲}+۴iz-۱}.$$

نقاط تکین f عبارتند از $z = ۰$ و $z = -۲i \pm \sqrt{۳}i$. پس دو نقطه تکین $z = ۰$ و $z = \sqrt{۳}i - ۲i$ در داخل دیسک واحد قرار دارند. نقطه تکین $z = ۰$ قطب مرتبه دو است. پس

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{۱}{(۲-۱)!} \lim_{z\to ۰} \frac{d}{dz} \frac{z^{۴}-۲z^{۲}+۱}{-۲z^{۲}-۸iz+۲} = ۲i.$$

و

$$\operatorname{Res}(f, (\sqrt{۳}-۲)i) = -\frac{z^{۴}-۲z^{۲}+۱}{۲z(z^{۲}+۴iz-۱)+z^{۲}(۲z+۴i)}\bigg|_{z=(\sqrt{۳}-۲)i} = -\frac{۴i}{\sqrt{۳}}$$

بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.

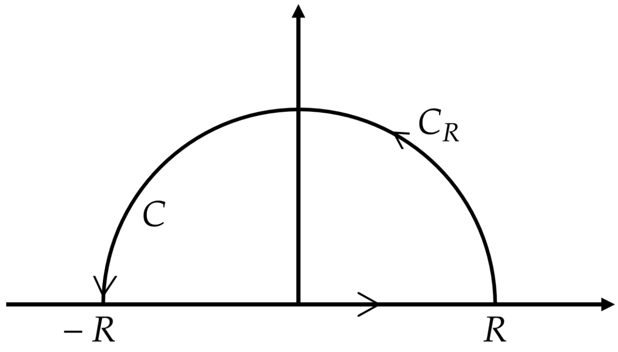
$$\int_{۰}^{۲\pi} \frac{\sin^{۲}\theta}{۲+\sin\theta}\, d\theta = ۲\pi i\left(۲i - \frac{۴i}{\sqrt{۳}}\right) = ۲\pi\left(\frac{۴}{\sqrt{۳}} - ۲\right).$$

خاصیت ۲.۲۱. فرض کنید $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ یک تابع کسری باشد، یعنی $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای اند به‌طوری‌که $q(x)$ فاقد ریشه حقیقی و درجه $q(x)$ حداقل دوتا بیشتر از درجه $p(x)$ باشد. آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

که در آن $z_۱$ تا z_n قطب‌های f در نیم‌صفحه بالایی است.

علت. انتگرال $\oint_C f(z)\,dz$ روی منحنی C در شکل ۷.۲ که R بسیار بزرگ است تا تمام نقاط تکین در نیم‌صفحه بالایی f در داخل C قرار گیرد را در نظر بگیرید.



شکل ۷.۲

در این‌صورت

$$\oint_C f(z)\,dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

از طرف دیگر

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

لیکن اعداد مثبت M و N موجود است به‌طوری‌که برای R بزرگ داریم:

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| \leq \frac{M}{R^۲ - N} \cdot \pi R$$

پس $\int_{C_R} f(z)\,dz \to ۰$ وقتی‌که $R \to \infty$. از فوق داریم:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

حال اگر $R \to \infty$ به‌دست می‌آوریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

مثال ۲۱.۲. مطلوبست محاسبه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲ - ۱}{(x^۲ + ۱)^۲ (x^۲ + ۴)}\,dx.$$

حل. داریم:

$$f(z) = \frac{z^۲ - ۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}.$$

نقاط قطب عبارتند از $\pm i$ و $\pm ۲i$ و i و $۲i$ در نیم‌صفحه بالایی قرار دارند. شرایط خاصیت فوق برقرار است. پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲-۱}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۴)}\,dx = ۲\pi i\Big(\mathrm{Res}\,(f,i) + \mathrm{Res}\,(f,۲i)\Big).$$

قطب $z_۰ = ۲i$ یک قطب ساده است. پس

$$\mathrm{Res}\,(f,۲i) = \lim_{z\to ۲i}(z-۲i)\frac{z^۲-۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)} = \frac{(۲i)^۲-۱}{((۲i)^۲+۱)^۲(۲i+۲i)} = \frac{-۵}{۳۶i}.$$

قطب i از مرتبه دو است و

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f,i) &= \frac{۱}{(۲-۱)!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^۲-۱}{(z+i)^۲(z^۲+۴)}\\ &= \frac{۲i(-۴\cdot ۳) - [۴i\cdot ۳ + ۲i(-۴)](-۲)}{۱۶\cdot ۹} = -\frac{i}{۹}.\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲-۱}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۴)}\,dx = ۲\pi i\Big(-\frac{i}{۹} - \frac{۵}{۳۶i}\Big) = -\frac{\pi}{۱۸}.$$

خاصیت ۲۲.۲. فرض کنید $f(z)$ تابع خاصیت ۲۱.۲ و $a > ۰$ عددی ثابت باشد. آن‌گاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \mathrm{Res}\,(f(z)e^{iaz}, z_k)$$

که در آن $z_۱$ تا z_n قطب‌های f در نیم‌صفحه بالایی است.

علت. منحنی C را همان منحنی شکل ۷.۲ در نظر بگیرید. در این‌صورت

$$\oint_C f(z)e^{iaz}\,dz = ۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\mathrm{Res}\,(f(z)e^{iaz}, z_k).$$

از طرف دیگر

$$\oint_C f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx + \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz.$$

همچنین اعداد مثبت M و N موجود است به‌طوری‌که

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leq \frac{M}{R^۲-N}\max_{y\in[۰,R]} e^{-ay}\cdot \pi R \leq \frac{M}{R^۲-N}\cdot \pi R.$$

پس $\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz \to ۰$ وقتی‌که R به‌سمت بی‌نهایت برود. حال اگر در تساوی زیر که در فوق به‌دست آمده است $R\to\infty$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx + \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = ۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Res}\,(f(z)e^{iaz},z_k).$$

تذکر. ۱) برای این خاصیت اگر درجه مخرج کسر $f(x)$ حداقل یکی بیشتر از درجه صورت باشد باز هم نتیجه برقرار است.

۲) با توجه به‌این‌که $e^{iax}=\cos ax + i\sin ax$ است پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \Re\left\{۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Res}\,(f(z)e^{iaz},z_k)\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \Im\left\{۲\pi i\sum_{k=۱}^{n}\operatorname{Res}\,(f(z)e^{iaz},z_k)\right\}.$$

به‌این‌ترتیب محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها مقدور است.

مثال ۲.۲۲. مطلوبست محاسبه

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(۱+x^۲)^۲}\,dx.$$

حل. با توجه به مطالب فوق می‌بایستی $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(۱+x^۲)^۲}\,dx$ را محاسبه کنیم. زیرا قسمت موهومی جواب این انتگرال جواب انتگرال فوق است. طبق خاصیت ۲.۲۲،

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(۱+x^۲)^۲}\,dx = ۲\pi i\sum_{k}\operatorname{Res}\,(\frac{ze^{iz}}{(۱+z^۲)^۲},z_k).$$

تنها قطب این تابع در نیم‌صفحه بالائی $z_۰=i$ و قطب مرتبه دو است.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\,(\frac{ze^{iz}}{(۱+z^۲)^۲},i) &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{ze^{iz}}{(z+i)^۲}\\ &= \frac{(e^{-۱}-e^{-۱})(۲i)^۲-۲(۲i)ie^{-۱}}{(۲i)^۴}=\frac{۱}{۴e}.\end{aligned}$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(۱+x^۲)^۲}dx = \frac{\pi}{۲e}.$$

تذکر. چنان‌چه C یک منحنی جردن هموار و $z_۰$ قطب ساده $f(z)$ بر روی منحنی C قرار داشته باشد در این‌صورت اثر این قطب در انتگرال روی منحنی جردن C نصف می‌گردد.

مثال ۲۳.۲. مطلوبست محاسبه

$$\oint_{|z|=۱} \frac{۱}{z(z-۱)}dz.$$

حل. تابع زیر انتگرال دارای دو قطب ساده $z_۰ = ۰$ و $z_۱ = ۱$ است. قطب $z_۰ = ۰$ در داخل منحنی $C : |z| = ۱$ و قطب $z_۱ = ۱$ در روی C قرار دارد. پس

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=۱} \frac{۱}{z(z-۱)}dz &= ۲\pi i\mathrm{Res}\left(\frac{۱}{z(z-۱)}, ۰\right) + \pi i\mathrm{Res}\left(\frac{۱}{z(z-۱)}, ۱\right)\\ &= ۲\pi i(-۱) + \pi i(۱) = -\pi i.\end{aligned}$$

مثال ۲۴.۲. مطلوبست محاسبه

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

حل. برای محاسبه این انتگرال، انتگرال $\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz$ را که منحنی C به‌صورت شکل ۷.۲ است در نظر بگیرید. با توجه به تذکر فوق و این‌که $z = ۰$ یک قطب ساده است، داریم:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz = \pi i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, ۰\right) = \pi i.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz &= \int_{-R}^{۰} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{۰}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\\ &= -\int_{۰}^{R} \frac{e^{-ix}}{x}dx + \int_{۰}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz.\end{aligned}$$

که انتگرال اولی به‌کمک تغییر متغیر $x \to -x$ از انتگرال $\int_{-R}^{۰} \frac{e^{ix}}{x}dx$ به‌دست می‌آید. پس

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z}dz = ۲i\int_{۰}^{R} \frac{\sin x}{x}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = \pi i.$$

حال اگر $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$ باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

حال نشان می‌دهیم $\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\to 0$ وقتی‌که $R\to\infty$.

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_0^\pi \frac{e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}}{Re^{it}}Rie^{it}dt=i\int_0^\pi e^{iR\cos t}\cdot e^{-R\sin t}\,dt.$$

می‌دانیم برای $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ عددی مانند $a>0$ موجود است به‌طوری‌که $\sin t\ge at$. پس

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\right|\le\int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin t}\,dt$$

$$\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rat}\,dt=\frac{2}{aR}\left(1-e^{-\frac{\pi}{2}aR}\right).$$

بنابراین $\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz\to 0$ وقتی‌که $R\to\infty$.

تمرین ۳.۲

۱. نوع هر یک از نقاط تکین هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.

آ) $f(z)=\frac{z+2}{z^4(z-2)^2}$

ب) $f(z)=\frac{1}{(e^z-1)z^2}$

ج) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$

د) $f(z)=z^{-4}(\sin z^4)^{-1}$

۲. مانده‌های هر یک از توابع زیر را در هر یک از نقاط تکین آن محاسبه کنید.

آ) $f(z)=\frac{(1-z^2)e^{2z}}{z^2}$

ب) $f(z)=\frac{\tan z}{(z-\frac{\pi}{4})^2z}$

ج) $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$

د) $f(z)=\frac{z^2+1}{e^z\sin z}$

۳. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

آ) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cot z}{1+z+z^2} dz$
ب) $\oint_{|z|=5\pi} \tan z \, dz$
ج) $\oint_{|z|=\frac{5}{2}} e^z \tan z \, dz$
د) $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{(z+1)\sin z}{z^3} dz$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\oint_{|z|=1} \frac{iz+1}{(z^2+1)^2(z+2i)} dz$
ب) $\oint_{|z|=1} \bar{z} \cos \frac{1}{z} dz$
ج) $\oint_{|z|=2} z \sin \frac{1}{z} d\bar{z}$
د) $\oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z \, d\bar{z}$

۵. انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

آ) $\oint_{|z|=1} e^x y \, dz$
ب) $\oint_{|z|=1} \sin \frac{1}{z} dx$
ج) $\oint_{|z|=1} e^y \, dx$
د) $\oint_{|z|=1} \cot \bar{z} \, dy$

۶. انتگرال‌های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_0^{\pi} \frac{1}{4+\cos 2\theta} d\theta$
ب) $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{3+\sin\theta} d\theta$
ج) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{5-4\cos\theta} d\theta$
د) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta+\cos\theta}{3+\cos 2\theta} d\theta$

۷. انتگرال‌های حقیقی زیر را به‌دست آورید.

آ) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} dx$
ب) $\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$
ج) $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{1+x^8} dx$
د) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2} dx$

۸. مطلوبست محاسبه

آ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2} dx$
ب) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 3x}{1+x^4} dx$
ج) $\int_0^{\infty} \frac{x\sin 4x}{(4+x^2)^2} dx$
د) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx$

۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

آ) $\int_{\circ}^{\pi} \sin^{\text{۲}n} x\,dx$

ب) $\int_{\circ}^{\pi} \frac{\text{۱}}{\text{۱}+\sin^{\text{۲}} t} dt$

ج) $\int_{\circ}^{\pi} \cos^{\text{۲}n} x\,dx$

د) $\int_{\circ}^{\text{۲}\pi} e^{\sin\theta} d\theta$

۴.۲ اصل آوند و قضیه روشه

در این بخش به دو کاربرد اساسی انتگرال مختلط می‌پردازیم. در بسیاری از شاخه‌های علوم مهندسی از جمله مهندسی کنترل تعیین موقعیت قرارگیری صفرها و قطب‌های توابع در صفحه اعداد مختلط اطلاعات مهمی را آشکار می‌سازد. اصل آوند که در ادامه می‌آید، در این زمینه می‌باشد و می‌توان از آن برای یافتن کارآمد صفر یا قطب توابع مختلط استفاده کرد. در عمل این‌کار به‌کمک رایانه صورت می‌گیرد. حتی با خطاهای گرد کردن که در محاسبات عددی اجتناب ناپذیر است، نتیجه عبارت زیر

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

که طبق اصل آوند تفاضل تعداد صفرها و قطب‌های تابع f را درون منحنی C با احتساب تکرر نمایش می‌دهد، نزدیک یک عدد صحیح خواهد بود. با تعیین این عدد صحیح برای منحنی‌های مختلف C می‌توان اطلاعات مربوط به محل صفرها و قطب‌ها را به‌دست آورد.

نخستین بار آگوستین–لوئیس کشی در سال ۱۸۳۱ به دور از زادگاه خود فرانسه در جریان تبعیدش در تورین، نسخه‌ای مشابه از قضیه فوق را ارائه کرد. با این حال قضیه او برای توابع فاقد قطب بود و فقط صفرهای توابع را شمارش می‌کرد. این قضیه به‌دلیل دست‌نویس بودن، ناخوانا بود. کشی در سال ۱۸۵۵، دو سال قبل از مرگش، مقاله دیگری اما این بار با بحث در مورد هر دو صفر و قطب منتشر کرد.

نهایتاً در انتهای این بخش قضیه روشه که نتیجه‌ای از اصل آوند است و تعیین موقعیت و تعداد صفرهای توابع را راحت‌تر ممکن می‌سازد بیان می‌داریم.

خاصیت ۲۳.۲ (اصل آوند). فرض کنید f درون و روی منحنی جردن C به‌جز احتمالاً تعدادی متنهای قطب درون C تحلیلی و f روی C غیر صفر و درون C تعدادی متناهی صفر داشته باشد. آن‌گاه داریم:

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$$

که در آن N و P با احتساب تکرر به‌ترتیب تعداد صفرها و قطب‌های f در درون C است.

علت. فرض کنید z_1 تا z_n صفرهای f درون خم C به‌ترتیب از مرتبهٔ k_1 تا k_n باشند. پس $\sum_{i=1}^{n} k_i = N$. در همسایگی از z_i به‌صورت $|z - z_i| < \rho_i$ که داخل C قرار دارد و f روی آن تحلیلی است و داخل آن صفری جز z_i وجود ندارد، می‌توان نوشت:

$$f(z) = (z - z_i)^{k_i} g_i(z), \quad 1 \le i \le n$$

که در آن g_i روی $|z - z_i| < \rho_i$ تحلیلی و فاقد صفر است. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که در این همسایگی داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_i}{z - z_i} + \frac{g_i'(z)}{g_i(z)}.$$

اکنون فرض کنید w_1 تا w_m قطب‌های f درون خم C به‌ترتیب از مرتبهٔ l_1 تا l_m باشند. پس $\sum_{i=1}^{m} l_i = P$. در همسایگی محذوفی از w_j به‌صورت $0 < |w - w_j| < \lambda_j$ که داخل C قرار دارد و f روی آن تحلیلی و فاقد صفر است، می‌توان نوشت:

$$f(z) = (z - w_j)^{-l_j} h_j(z), \quad 1 \le j \le m.$$

که در آن h_j روی $|z - w_i| < \lambda_j$ تحلیلی و فاقد صفر است. بار دیگر محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که در این همسایگی محذوف داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-l_j}{z - w_j} + \frac{h_j'(z)}{h_j(z)}.$$

حال فرض کنید C_i، $1 \le i \le n$، دایره‌ای به مرکز z_i واقع در $|z - z_i| < \rho_i$ و Γ_j، $1 \le j \le m$، دایره‌ای به مرکز w_j واقع در $|z - w_j| < \lambda_j$ باشد. C_iها و Γ_jها همدیگر را قطع نمی‌کنند.

حال طبق خاصیت ۳.۲، فرمول انتگرال کشی و قضیه انتگرال کشی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+\sum_{j=1}^{m}\oint_{\Gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\left(\frac{k_i}{z-z_i}+\frac{g_i'(z)}{g_i(z)}\right)dz\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}\left(\frac{-l_j}{z-w_j}+\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}\right)dz\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{k_i}{z-z_i}\,dz+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_i}\frac{g_i'(z)}{g_i(z)}\,dz\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}\frac{-l_j}{z-w_j}\,dz+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}\frac{h_j'(z)}{h_j(z)}\,dz\\
&=\sum_{i=1}^{n}k_i+0+\sum_{j=1}^{m}(-l_j)+0=N-P.\end{aligned}$$

تذکر. توجه کنید چون f روی C صفر نمی‌شود پس تصویر منحنی C تحت f، یعنی $\Gamma=f(C)$ در صفحه w، از مبدأ مختصات نمی‌گذرد. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{1}{w}\,dw.$$

عبارت سمت راست که یک عدد صحیح است دارای تعبیر مهم زیر می‌باشد. فرض کنید $z_0=r_0e^{i\theta_0}$ نقطه‌ای روی منحنی C و $w_0=f(z_0)$ تصویر آن تحت f روی Γ باشد. با انتخاب شاخه لگاریتمی $\log_{\theta_0}(\cdot)$ یعنی:

$$\log_{\theta_0}z=\ln|z|+i\arg z,\qquad \theta_0<\arg z<\theta_0+2\pi$$

و طی یک فرآیند حدی داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\log_{\theta_0} f(z)\Big|_{z_0}^{r_0 e^{i(2\pi+\theta_0-\epsilon)}}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\Big(\ln|f(z)| + i\arg f(z)\Big)\Big|_{z_0}^{r_0 e^{i(2\pi+\theta_0-\epsilon)}}\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\left(\arg f\left(r_0 e^{i(2\pi+\theta_0-\epsilon)}\right) - \arg f(z_0)\right)\right]\\ &:= \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f.\end{aligned}$$

که در آن $\Delta_C \arg f$ نشان دهنده میزان تغییر $\arg f(z)$ است، وقتی z منحنی C را یک دور در جهت مثلثاتی طی می‌کند. در نتیجه:

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f.$$

دلیلی نام‌گذاری اصل آوند به‌خاطر رابطه فوق است. همچنین به‌وضوح $\Delta_C \arg f$ برابر تعداد دفعاتی است که منحنی Γ مبدأ را در صفحه w دور می‌زند، وقتی از w_0 شروع کرده و یک‌بار Γ را می‌پیماید و دوباره به w_0 برمی‌گردد.

خاصیت ۲۴.۲ (قضیه روشه). فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ روی منحنی جردن C و درون آن تحلیلی باشند و در هر نقطه روی C داشته باشیم $|g(z)| < |f(z)|$. آن‌گاه تعداد صفرهای $f+g$ و f درون C برابرند.

علت. طبق اصل آوند کافی است نشان دهیم:

$$\Delta_C \arg(f+g) = \Delta_C \arg f.$$

برای این منظور به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\Delta_C \arg(f+g) &= \Delta_C \arg\left(f\cdot\left(1+\frac{g}{f}\right)\right)\\ &= \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg\left(1+\frac{g}{f}\right).\end{aligned}$$

که در فوق از اتحاد $\Delta_C \arg(f\cdot g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg g$، مسئله ۲، استفاده شده است. اما چون $|g| < |f|$ روی C، پس تصویر C تحت نگاشت $h = 1 + \frac{g}{f}$، یعنی $\Gamma = h(C)$، در صفحه w

درون دایره $|w-1|<1$ قرار می‌گیرید. در نتیجه Γ مبدأ را دور نمی‌زند و در نتیجه $\Delta_C \arg h = 0$. پس اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۲.۲۵. تعداد صفرهای تابع $F(z) = z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ را درون دایره واحد تعیین کنید.

حل. قرار دهید:

$$f(z) = -5z^4 \quad , \quad g(z) = z^7 + z^2 - 2.$$

در این‌صورت روی دایره واحد داریم:

$$|f(z)| = |-5z^4| = 5 \quad , \quad |g(z)| \leq |z^7| + |z^2| + 2 = 4.$$

پس روی دایره واحد نابرابری $|g(z)| < |f(z)|$ برقرار است. پس طبق قضیه روشه تعداد صفرهای F و f درون دایره واحد برابر است. چون f با احتساب تکرر در درون دایره واحد دارای چهار ریشه است پس F نیز درون دایره واحد چهار ریشه دارد.

تمرین ۲.۴

۱. فرض کنید f درون و روی منحنی جردن C به‌جز احتمالاً تعدادی متنهای قطب درون C تحلیلی و f روی C غیر صفر و درون C تعدادی متناهی صفر داشته باشد. همچنین فرض کنید g درون و روی C تحلیلی باشد. تعمیم زیر از اصل آوند را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{n} g(z_k) - \sum_{k=1}^{m} g(p_k)$$

که در آن z_1 تا z_n و p_1 تا p_m به‌ترتیب ریشه‌ها و قطب‌های f در درون C است که به تعداد مرتبه هر کدام ظاهر شده‌اند.

۲. درستی اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\Delta_C \arg(f\cdot g) = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg g.$$

۳. نشان دهید تمام صفرهای $f(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$ درون طوق $1 < |z| < 3$ قرار دارد.

۴. تعداد جواب‌های $e^z = 5z^4$ را درون دایره واحد بیابید.

۵. تعداد صفرهای معادله $z^4 - 5z + 1 = 0$ در طوق $1 < |z| < 2$ را بیابید.

۶. تعداد جواب‌های معادلات زیر را در میدان‌های داده شده بیابید.

آ) $z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \quad |z| < 2$

ب) $z^8 - 6z^4 - z^3 + 2 = 0, \quad |z| < 1$

ج) $z^3 + z + 1 = 0, \quad |z| < \frac{1}{2}$

د) $z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3$

۵.۲ مروری بر انتگرال مختلط–سری لران و مانده

در بخش‌های قبلی اشاره کردیم که با یاد گرفتن انتگرال مختلط قادر خواهیم بود انتگرال‌های حقیقی پیچیده را بسیار ساده حساب کنیم. به‌طور مثال

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin\theta}\, d\theta \quad \text{یا} \quad \int_0^{\infty} \frac{x\sin x + \cos x}{(1+x^4)^2}\, dx.$$

برای محاسبه انتگرال‌های فوق مراحل زیر را طی می‌کنیم:

مرحله ۱: معرفی انتگرال مختلط و خواص مقدماتی آن

مرحله ۲: معرفی فرمول‌های ساده برای محاسبه انتگرال‌های مختلط

مرحله ۳: برقرار کردن ارتباط بین انتگرال‌های حقیقی از نوع فوق و انتگرال مختلط

مرحله ۴: معرفی سری لران و مانده و استفاده از آن‌ها برای آسان‌تر محاسبه کردن انتگرال مختلط

مرحله ۵: معرفی روش‌های مستقیم و ساده برای محاسبه مانده

مرحله ۶: محاسبه انتگرال های حقیقی با استفاده از مانده بدون حضور انتگرال مختلط

بعد از توضیح هر یک از مراحل فوق مثال‌های مربوط را در انتهای بخش می‌آوریم.

مرحله ۱: برای تابع مختلط و پیوسته

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

انتگرال آن را روی منحنی با طول متناهی

$$C: \; z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \leq t \leq b$$

با استفاده از مفهوم انتگرال روی منحنی برای توابع دومتغیره در صفحه از درس ریاضی عمومی ۲ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)\,(dx+idy)\\ &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy\end{aligned}$$

تذکر. این انتگرال روی منحنی کلیه خواص مقدماتی انتگرال را دارد. لیکن از دو خاصیت زیر بیشتر استفاده می‌شود.

خاصیت ۲.۲۵. اگر L برابر طول منحنی C و روی منحنی C داشته باشیم $|f(z)| \leq M$، و M عددی ثابت باشد، آنگاه

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML.$$

خاصیت ۲.۲۶. اگر $f(z)$ تحلیلی و منحنی C در دامنه آن باشد، آنگاه

$$\int_C f'(z)\,dz = f(z)\Big|_{z_0 \text{ نقطه ابتدایی } C}^{z_1 \text{ نقطه انتهایی } C} = f(z_1) - f(z_0).$$

مرحله ۲: برای محاسبه انتگرال مختلط فرمول‌های محاسباتی زیر اساسی است.

خاصیت ۲.۲۷ (قضیه انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن و تابع $f(z)$ روی C و داخل C تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

خاصیت ۲.۲۸. فرض کنید C یک منحنی جردن، C_1 و C_2 دو منحنی جردن جدا از هم در داخل C هستند. همچنین تابع $f(z)$ روی C، C_1 و C_2 تحلیلی است. آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

تذکر. تعداد منحنی‌های داخل C می‌تواند بیشتر از دو تا هم باشد.

خاصیت ۲۹.۲ (فرمول انتگرال کشی). فرض کنید C یک منحنی جردن، $z_\circ$ داخل C و تابع $f(z)$ روی C و داخل C تحلیلی است. آنگاه

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_\circ}\,dz = ۲\pi i f(z_\circ).$$

خاصیت ۳۰.۲ (فرمول مشتق). فرض کنید C، $z_\circ$ و f مانند خاصیت ۲۹.۲ باشند. آنگاه برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}\,dz = ۲\pi i\frac{f^{(n)}(z_\circ)}{n!}$$

مرحله ۳: ارتباط بین انتگرال مختلط و انتگرال حقیقی

برای محاسبه انتگرال‌های مثلثاتی به‌صورت

$$\int_\circ^{۲\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

می‌گیریم $z = e^{i\theta}$. دراین‌صورت $dz = ie^{i\theta}d\theta$ یا $d\theta = \frac{۱}{iz}dz$ و

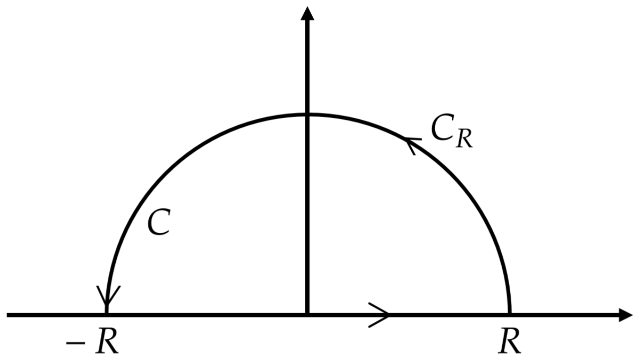
$$\int_\circ^{۲\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=۱} Q\left(\frac{z+\frac{۱}{z}}{۲}, \frac{z-\frac{۱}{z}}{۲i}\right)\frac{۱}{iz}\,dz.$$

به‌این‌صورت انتگرال حقیقی به انتگرال مختلط تبدیل می‌شود.

برای محاسبه انتگرال‌هایی از نوع $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos ax\\ \sin ax\end{Bmatrix} dx$ برای $a \geq \circ$، منحنی C را به‌صورت زیر، یعنی شکل ۸.۲، می‌گیریم:

پس

$$\oint_C f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}\,dx + \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz.$$



شکل ۸.۲: منحنی $C = C_R \cup [-R, +R]$

با محاسبه مقدار انتگرال سمت چپ برای R بزرگ و میل دادن $R \to \infty$، مقدار $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ محاسبه می شود. با استفاده از تساوی‌های زیر انتگرال‌های مطلوب به‌دست می‌آیند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx$$

مرحله ۴: سری لران و مانده

خاصیت ۳۱.۲ (سری یا بسط لران). فرض کنید $z_\circ$ یک نقطه تکین $f(z)$ و $f(z)$ روی دایره $C:\ |z-z_\circ| = r$ و داخل آن غیر از $z_\circ$ تحلیلی باشد. آنگاه

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_\circ)^n, \qquad a_n = \frac{۱}{۲\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-z_\circ)^{n+۱}}\,dz.$$

تذکر. برای $n = -۱$ داریم $۲\pi i a_{-۱} = \oint_C f(z)\,dz$. به این دلیل $a_{-۱}$ را مانده f در $z_\circ$ می‌گویند و با $\mathrm{Res}\,(f, z_\circ)$ نمایش می‌دهند.

تذکر. برای محاسبه سری لران می‌بایستی از خواص سری توانی و سری‌های مک لورن توابع استفاده کرد.

تعریف ۲.۲. اگر تعداد جملات با توان منفی در بسط لران m تا باشد، $z_\circ$ را یک قطب از مرتبه m می‌گویند. قطب از مرتبه اول را قطب ساده گویند.

تشخیص قطب از مرتبه m: اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ و توابع p و q تحلیلی باشند به‌طوری‌که $p(z_\circ) \neq \circ$ و $z_\circ$ یک ریشه از مرتبه m تابع $q(z)$ باشد، آنگاه $z_\circ$ یک قطب از مرتبه m تابع $f(z)$ است.

خاصیت ۳۲.۲ (قضیه مانده). اگر C یک منحنی جردن و تابع $f(z)$ روی C و داخل C غیر از نقاط $z_۱$ تا z_n تحلیلی باشد، آنگاه

$$\oint_C f(z)\,dz = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

مرحله ۵: روش مستقیم محاسبه مانده

خاصیت ۳۳.۲ (محاسبه مانده). ۱) فرض کنید $z_۰$ یک قطب ساده تابع $f(z)$ است.

الف) $\operatorname{Res}(f, z_۰) = \lim_{z\to z_۰}(z-z_۰)f(z)$.

ب) اگر $z_۰$ یک قطب ساده تابع f و $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ به‌طوری‌که تابع $q(z)$ تحلیلی و $p(z_۰) \neq ۰$، آنگاه $\operatorname{Res}(f, z_۰) = \frac{p(z_۰)}{q'(z_۰)}$.

۲) اگر $z_۰$ یک قطب از مرتبه m تابع f باشد، آنگاه

$$\operatorname{Res}(f, z_۰) = \frac{۱}{(m-۱)!}\lim_{z\to z_۰}\frac{d^{m-۱}}{dz^{m-۱}}(z-z_۰)^m f(z).$$

مرحله ۶: محاسبه انتگرال‌های حقیقی با استفاده از مانده

خاصیت ۳۴.۲ (محاسبه انتگرال‌های حقیقی مثلثاتی). فرض کنید $Q(x,y)$ تابع دومتغیره حقیقی روی دیسک بسته $x^۲+y^۲ \leq ۱$، دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته و روی دایره $x^۲+y^۲=۱$ پیوسته باشد. آنگاه اگر $f(z) = \frac{۱}{iz}Q\left(\frac{۱}{۲}(z+\frac{۱}{z}), \frac{۱}{۲i}(z-\frac{۱}{z})\right)$ باشد، آنگاه

$$\int_۰^{۲\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = ۲\pi i \sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

که در آن $z_۱$ تا z_n نقاط تکین تابع f در داخل دایره واحد است.

تذکر. نقطه تکین غیر قطب را نقطه تکین اساسی می‌گویند.

خاصیت ۳۵.۲ (محاسبه انتگرال‌های ناسره روی $\mathbb{R}$). فرض کنید $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$، $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای به‌طوری‌که درجه $q(x)$ حداقل دو تا بیشتر از درجه $p(x)$ و $q(x)$ فاقد ریشه حقیقی باشد. آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = ۲\pi i\sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f,z_k)$$

که در آن $z_۱$ تا z_n قطب‌های تابع f در نیم‌صفحه بالایی است.

خاصیت ۳۶.۲ (محاسبه انتگرال‌های ناسره توابع مثلثاتی). فرض کنید $f(x)$ مانند خاصیت ۳۴.۲ و $a>۰$ عددی ثابت باشد. آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = ۲\pi i\sum_{k=۱}^{n} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz},z_k)$$

که در آن $z_۱$ تا z_n قطب‌های تابع f در نیم‌صفحه بالایی است.

تذکر. حالت ۳۶.۲ برای حالت درجه $q(x)$ یکی بیشتر از درجه $p(z)$ نیز صادق است.

تذکر. در بعضی از انتگرال‌ها $\bar{z}$ و یا $d\bar{z}$ یا ظاهر می‌شود. این مقادیر برای روی منحنی C انتگرال‌گیری است که معمولاً به‌صورت دایره $|z-z_۰|=R$ است. توجه کنید که از روی تساوی $R^۲=|z-z_۰|^۲=(z-z_۰)(\bar{z}-\bar{z}_۰)$، مقدار $\bar{z}$ قابل محاسبه است. یعنی، $\bar{z}=\bar{z}_۰+\frac{R^۲}{z-z_۰}$. همچنین،

$$d\bar{z}=\frac{-R^۲}{(z-z_۰)^۲}dz.$$

مثال ۲۶.۲ (برای خاصیت ۲۵.۲).

$$\left|\int_{|z|=R>۱}\frac{z^۲}{۱+z^۲}dz\right|\le\frac{R^۲}{R^۲-۱}\,۲\pi R.$$

مثال ۲۷.۲ (برای خاصیت ۲۶.۲). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

حل.

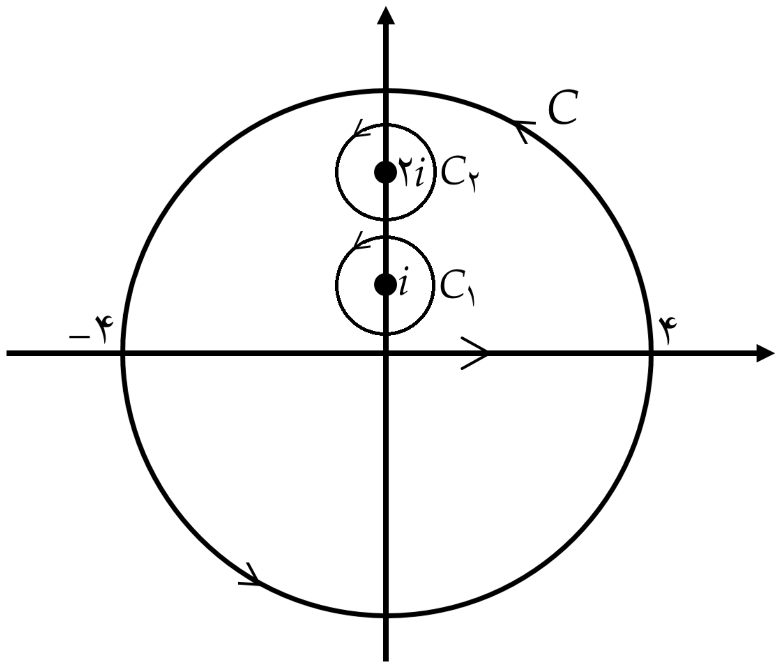
$$\int_{۱+i}^{۲-۳i}\cosh z\,dz=\sinh z\Big|_{۱+i}^{۲-۳i}=\sinh(۲-۳i)-\sinh(۱+i).$$

مثال ۲۸.۲ (برای خاصیت ۲۷.۲). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 \cos z}{(z^4+4)(z^2+6)}\, dz$$

حل. چون تابع زیر انتگرال در $|z| \leq 1$ تحلیلی است، پس $I = 0$.

مثال ۲۹.۲ (برای خاصیت ۲۸.۲). برای منحنی‌های C، C_1 و C_2 به‌طوری‌که



شکل ۹.۲: منحنی‌های C، C_1 و C_2

$$C: |z| = 4, \quad C_1: |z-i| = \frac{1}{4}, \quad C_2: |z-2i| = \frac{1}{4}$$

(شکل ۹.۲ را ببینید.) حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I = \oint_C \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz$$

حل.

$$I = \oint_{C_1} \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz + \oint_{C_2} \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz.$$

مثال ۳۰.۲ (برای خاصیت ۲۹.۲). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z-2i|=\frac{1}{4}} \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz$$

حل.

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z-۲i|=\frac{۱}{۴}} \frac{\frac{z^۲+z+۱}{(z^۲+۱)^۲(z+۲i)}}{z-۲i}\,dz \\
&= ۲\pi i \frac{z^۲+z+۱}{(z^۲+۱)^۲(z+۲i)}\bigg|_{z=۲i} \\
&= ۲\pi\frac{-۳+۲i}{۳۶}.
\end{aligned}$$

مثال ۳۱.۲ (برای خاصیت ۳۰.۲). انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \oint_{|z-i|=\frac{۱}{۴}} \frac{z^۲+z+۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}\,dz$$

حل.

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z-i|=\frac{۱}{۴}} \frac{\frac{z^۲+z+۱}{(z+i)^۲(z^۲+۴)}}{(z-i)^۲}\,dz \\
&= ۲\pi i \frac{d}{dz}\frac{z^۲+z+۱}{(z+i)^۲(z^۲+۴)}\bigg|_{z=i} \\
&= ۲\pi i \frac{(۲z+۱)(z+i)^۲(z+۴)-\left[۲(z+i)(z^۲+۴)+۲z(z+i)^۲\right](z^۲+z+۱)}{\left((z+i)^۲(z^۲+۴)\right)^۲}\Bigg|_{z=i} \\
&= ۲\pi i\frac{-۶i-۲}{۳۶} = ۲\pi\frac{۶-۲i}{۳۶}.
\end{aligned}$$

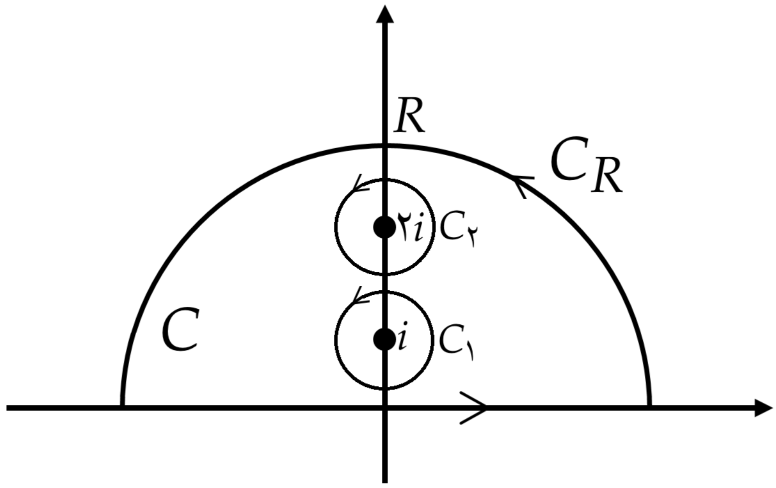
مثال ۳۲.۲ (برای مرحله ۳). مطلوبست محاسبه $I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{۲\sin\theta}\,d\theta$.

حل. با توجه به مطالب مرحله ۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=۱} e^{۲\frac{z-\frac{۱}{z}}{۲i}}\frac{dz}{iz} \\
&= \oint_{|z|=۱} e^{\frac{i}{z}}e^{-iz}\frac{dz}{iz} \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{i^{n-۱}}{n!}\oint_{|z|=۱}\frac{e^{-iz}}{z^{n+۱}}\,dz \\
&= \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{i^{n-۱}}{n!}\frac{۲\pi i}{n!}(-i)^n = ۲\pi\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{(n!)^۲}.
\end{aligned}$$

مثال ۳۳.۲. مطلوبست محاسبه $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^۲+x+۱}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۴)}dx$.

حل. منحنی جردن را به‌صورت شکل ۱۰.۲ در نظر می‌گیریم.



شکل ۱۰.۲: منحنی‌های C، $C_۱$ و $C_۲$

همچنین انتگرال مختلط زیر را روی منحنی فوق در نظر می‌گیریم که طبق مثال‌های ۲۹.۲، ۳۰.۲ و ۳۱.۲ می‌نویسیم

$$\int_C \frac{z^۲+z+۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}dz$$
$$=\underbrace{\int_{C_۱}\frac{z^۲+x+۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}dz+\int_{C_۲}\frac{z^۲+x+۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}dz}_{\text{مثال ۲۹.۲}}$$
$$=\underbrace{۲\pi\frac{۶-۲i}{۳۶}}_{\text{مثال ۳۱.۲}}+\underbrace{۲\pi\frac{-۳+۲i}{۳۶}}_{\text{مثال ۳۰.۲}}$$
$$=۲\pi\frac{۳}{۳۶}=\frac{\pi}{۶}.$$

حال از خاصیت ۲۵.۲ داریم

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^۲+z+۱}{(z^۲+۱)^۲(z^۲+۴)}dz\right|\le \pi R\frac{R^۲+R+۱}{(R^۲-۱)(R^۲-۴)^۲}.$$

از طرفی $\frac{R^۲+R+۱}{(R^۲-۱)(R^۲-۴)^۲}\longrightarrow ۰$ وقتی $R\to\infty$. درنتیجه $I=\frac{\pi}{۶}$.

مثال ۳۴.۲ (برای خاصیت ۳۱.۲). مطلوبست محاسبه

$$I = \oint_{|z|=1} z^6 \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

حل. تنها نقطه تکین تابع زیر انتگرال $z=0$ است. همچنین از بسط مک لورن سینوسی داریم

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}, \qquad w \in \mathbb{C}.$$

حال به جای w قرار می‌دهیم $\frac{1}{z}$. پس

$$z^6 \sin\frac{1}{z} = z^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n+5}.$$

مانده در نقطه $z=0$ برابر با ضریب z^{-1} در بسط فوق است. بنابراین برای جمله مانده باید $-2n+5=-1$ یا $n=3$. درنتیجه

$$\operatorname{Res}\left(z^6 \sin\frac{1}{z}, 0\right) = a_{-1} = \left.\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|_{n=3} = -\frac{1}{7!}.$$

پس

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{7!}\right) = \frac{-2\pi i}{7!}.$$

مثال ۳۵.۲ (برای خاصیت ۳۲.۲ و ۳۳.۲). مطلوبست محاسبه

$$I = \int_C \frac{z^2+z+1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}\, dz$$

که در آن C همان منحنی جردن مثال ۳۳.۲ است.

حل. نقاط تکین در داخل C عبارت‌اند از $z_1 = 2i$ که قطب ساده و $z_2 = i$ که قطب مرتبه ۲ است. پس

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i\Big(\operatorname{Res}(f,2i) + \operatorname{Res}(f,i)\Big) \\
&= 2\pi i\left(\left.\frac{z^2+z+1}{4z(z^2+1)(z^2+4)+2z(z^2+1)^2}\right|_{z=2i} + \left.\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\frac{z^2+z+1}{(z+i)^2(z^2+4)}\right|_{z=i}\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{-3+2i}{36i} + \frac{6-2i}{36i}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

مثال ۳۶.۲ (برای خاصیت ۳۴.۲). مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sin\theta + ۲} d\theta.$$

حل. با توجه به خاصیت ۳۴.۲ خواهیم داشت

$$f(z) = \frac{\frac{z-\frac{۱}{z}}{۲i}}{\frac{z-\frac{۱}{z}}{۲i}+۲}\frac{۱}{iz} = \frac{z^۲-۱}{z^۲-۱+۴iz}\frac{۱}{iz} = \frac{۱}{i}\frac{z^۲-۱}{z(z^۲+۴iz-۱)}.$$

نقاط تکین عبارت‌اند از $z_۱ = ۰$، و ریشه‌های $z^۲ + ۴iz - ۱ = ۰$. ریشه‌های این چندجمله‌ای درجه دوم به‌صورت زیر است:

$$z = -۲i \pm \sqrt{-۴+۱} = -۲i \pm \sqrt{۳}i = (-۲ \pm \sqrt{۳})i.$$

نقاط تکین $z_۱ = ۰$ و $z_۲ = -(۲-\sqrt{۳})i$ داخل دایره واحد هستند و هر دو قطب ساده‌اند.

$$\mathrm{Res}(f, ۰) = \lim_{z\to ۰} \frac{۱}{i}\frac{z^۲-۱}{z^۲+۴iz-۱} = \frac{۱}{i} = -i$$

$$\mathrm{Res}\left(f, -(۲-\sqrt{۳})i\right) = \frac{۱}{i}\frac{z^۲-۱}{۳z^۲+۸iz-۱}\Bigg|_{z=-(۲-\sqrt{۳})i}$$

$$= \frac{۱}{i}\left(-\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right) = \frac{۲}{\sqrt{۳}}i.$$

پس

$$I = ۲\pi i\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}i - i\right) = ۲\pi\left(۱-\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right).$$

مثال ۳۷.۲ (برای خاصیت ۳۶.۲). مطلوبست محاسبه

$$I = \int_{۰}^{\infty} \frac{x^۳\sin x}{x^۴+۱} dx.$$

حل. در ابتدا می‌دانیم که

$$I = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۳\sin x}{x^۴+۱} dx.$$

با توجه به خاصیت ۳۶.۲ نقاط تکین عبارت‌اند از ریشه‌های $z^۴ = -۱$. پس

$$z^۴ = -۱ = e^{۲k\pi i+\pi i} = e^{(۲k+۱)\pi i} \quad\Rightarrow\quad z = e^{(۲k+۱)\frac{\pi}{۴}i},\ k = ۰,۱,۲,۳$$

$$\Rightarrow\quad z_۱ = e^{\frac{\pi}{۴}i},\quad z_۲ = e^{\frac{۳\pi}{۴}i},\quad z_۳ = e^{\frac{۵\pi}{۴}i},\quad z_۴ = e^{\frac{۷\pi}{۴}i}.$$

نقاط تکین $z_۱$ و $z_۲$ در نیم‌صفحه بالایی هستند.

حال مانده تابع $f(z)e^{iz} = \frac{z^۳ e^{iz}}{z^۴+۱}$ را در نقاط تکین $z_۱$ و $z_۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$\operatorname{Res}(f, z_۱) = \left.\frac{z^۳ e^{iz}}{۴z^۳}\right|_{z_۱=e^{\frac{\pi}{۴}i}} = \frac{e^{(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+i\frac{۱}{\sqrt{۲}})i}}{۴}$$

$$\operatorname{Res}(f, z_۲) = \left.\frac{z^۳ e^{iz}}{۴z^۳}\right|_{z_۱=e^{\frac{۳\pi}{۴}i}} = \frac{e^{(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+i\frac{۱}{\sqrt{۲}})i}}{۴}$$

درنتیجه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۳ \sin x}{x^۴+۱}\,dx = \Im ۲\pi i\Big(\frac{e^{(\frac{۱}{\sqrt{۲}}+i\frac{۱}{\sqrt{۲}})i}}{۴} + \frac{e^{(-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+i\frac{۱}{\sqrt{۲}})i}}{۴}\Big)$$

$$= ۲\pi \frac{e^{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}}{۲} \frac{e^{\frac{۱}{\sqrt{۲}}i} + e^{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}i}}{۲}$$

$$= \pi e^{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}} \cos \frac{۱}{\sqrt{۲}}.$$

بنابراین

$$I = \frac{\pi}{۲} \frac{\cos \frac{۱}{\sqrt{۲}}}{e^{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}}.$$

تمرین ۵.۲

۱. بسط لران توابع زیر را حول مبدأ مختصات بنویسید.

الف) $f(z) = \frac{z+۲}{z^۶(z-i)^۲}$

ب) $f(z) = \frac{۲z+۳i}{z^۵(z-۱)^۲}$

ج) $f(z) = \frac{۵z+۱}{z^۴(z+۱)^۲}$

د) $f(z) = \frac{z-۲}{z^۴(z+i)^۲}$

۲. مانده توابع زیر را در نقاط تکین آن‌ها به دست آورید.

الف) $f(z) = \frac{z+3}{z^3(z+2)}$

ب) $f(z) = \frac{3z+2i}{z(z+i)^3}$

ج) $f(z) = \frac{2z-4i}{(z+1)(z-i)^3}$

د) $f(z) = \frac{z+3i}{(z+1)^3(z-2i)}$

۳. مانده توابع زیر را در نقاط تکین آن‌ها محاسبه کنید.

الف) $f(z) = e^{z-\frac{1}{iz}}$

ب) $f(z) = \sin z\, e^{\frac{1}{z}}$

ج) $f(z) = e^z \cos \frac{1}{z}$

د) $f(z) = \sin \frac{1}{z} \cos z$

۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\oint_{|z|=1} \bar{z}^5 \cos z\, d\bar{z}$

ب) $\oint_{|z|=1} \bar{z} \tan z\, d\bar{z}$

ج) $\oint_{|z|=2} \bar{z}^2 \cot \bar{z}\, dz$

د) $\oint_{|z|=2} z^6 \sin \frac{1}{z}\, d\bar{z}$

۵. حاصل انتگرال‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta}{4-3\cos\theta}\, d\theta$

ب) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2-\sin\theta}\, d\theta$

ج) $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta$

د) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{3-2\sin\theta}\, d\theta$

۶. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{1+x^4}\, dx$

ب) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\, dx$

ج) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{16+x^4}\, dx$

د) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\, dx$

فصل ۳

نگاشت‌های همدیس

هدف از این فصل بررسی خواص هندسی توابع تحلیلی و استفاده از آن برای تبدیل میدان‌های «بد» به میدان‌های «خوب» است. مقصود از میدان «خوب» میدانی است که انجام عملیات مطلوب در آن ممکن و میدان «بد» میدانی است که انجام عملیات مطلوب در آن غیرممکن است. به عنوان مثال یک مثلث برای طرح و حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یک میدان «بد» و یک مربع یا مستطیل یک میدان «خوب» است. در فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای دیدیم حل مسائل معادلات پاره‌ای وقتی‌که $a < x < b$ و $c < y < d$ بود با استفاده از سری فوریه مقدور بود لیکن مسئله‌ای طرح نشد که (x,y) در داخل یک مثلث باشد. لیکن مسائلی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان مثلثی شکل نیز مطرح است که در فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای مطرح نشدند. مطالب این فصل به حل این‌گونه مسائل کمک می‌کنند. برای این‌که بتوانیم میدان‌های «بد» را به میدان‌های «خوب» با استفاده از توابع تحلیلی تبدیل کنیم می‌بایستی شناخت خوبی از توابع تحلیلی در کلیت و خواص توابعی خاص از آن را داشته باشیم. در بخش ۱.۳ به معرفی نگاشت‌های همدیس می‌پردازیم. در بخش ۲.۳ به بررسی چند تابع تحلیلی خاص می‌پردازیم. در بخش ۳.۳ کاربرد آنها را داریم.

۱.۳ نگاشت‌های همدیس

هدف از این بخش بررسی خواص هندسی توابع تحلیلی در کلیت می‌باشد. برای تابع یک متغیر حقیقی مانند $y = f(x)$ خواص هندسی مماس بر منحنی، طول منحنی، مساحت زیر منحنی، حجم دوار و

رویه دوار مطرح، برای توابع دو متغیر حقیقی نیز مطالب مشابه مانند حجم زیر رویه، سطح رویه و مماس بر رویه مطرح و قابل بررسی است. برای تابع تحلیلی چنین مفاهیم هندسی غیر قابل تصور است. چون برای نمایش نقاط دامنه تابع دو محور و نقاط برد تابع نیز دو محور نیاز است. در نتیجه عملیات در دو صفحه مجزا انجام می‌شود. لذا نمایش ارتباط نقاط در فضای سه بعدی مقدور نیست. لذا کار هندسی ممکن تعیین تصویر مجموعه نقاط، از قبیل خط، منحنی و یا اشکال خاص هندسی و انتقال ارتباط بین اجزا هندسی از دامنه به اجزا تصویر است. خاصیت همدیسی به این مطلب کمک می‌کند. برای بیان مفاهیم همدیسی نیاز به مقدمات زیر است.

برای منحنی $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ که به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

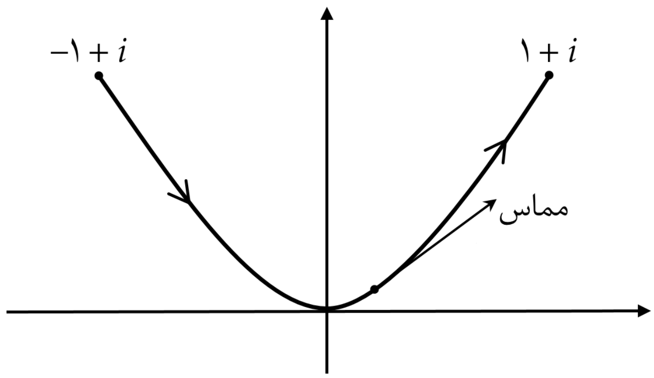
$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a,b]$$

جهت افزایش t را روی منحنی، جهت منحنی می‌گیریم. منحنی را هموار گوییم اگر بردار مماس بر آن در هر نقطه، یعنی

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t), \quad t \in (a,b)$$

موجود و غیرصفر باشد.

مثال ۱.۳. منحنی $\gamma(t) = t + it^۲, -۱ \leq t \leq ۱$ دارای نمایش شکل ۱.۳ است.



شکل ۱.۳

زاویه بین دو منحنی هموار را زاویه بین مماس‌های آنها در نظر می‌گیریم. همچنین، هر تابع پیوسته مانند $w = f(z)$ را از صفحه z به صفحه w، یک نگاشت گوییم.

نگاشت همدیس: نگاشت f از صفحه z به صفحه w را در نقطه $z_۰$ یک نگاشت همدیس گوییم اگر این

نگاشت زاویه بین دو منحنی همواری که از نقطه $z_\circ$ می‌گذرند را هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت حفظ نماید. یعنی اگر دو منحنی $C_۱$ و $C_۲$ که از نقطه $z_\circ$ می‌گذرند در این نقطه دارای زاویه α باشند تصویر این دو منحنی که از نقطه $f(z_\circ)$ می‌گذرند نیز دارای زاویه α باشند و به‌علاوه اگر مماس بر $C_۱$ در جهت مثلثاتی حول $z_\circ$ بر $C_۲$ منطبق شود در صفحه تصویر نیز مماس بر $C'_۱$ با چرخش در جهت مثلثاتی حول $f(z_\circ)$ بر مماس بر $C'_۲ = f(C_۲)$ منطبق گردد.

حال نشان می‌دهیم برای تابع تحلیلی $f(z)$ با $f'(z_\circ) \neq \circ$، نگاشت وابسته f در $z_\circ$ همدیس است. فرض کنید منحنی هموار $\gamma(t)$ از نقطه $z_\circ$ می‌گذرد و برای $t_\circ \in (a,b)$، $\gamma'(t_\circ) \neq \circ$ و $\gamma(t_\circ) = z_\circ$. در این‌صورت بردار مماس بر γ در $z_\circ$ عبارتست از

$$\lim_{\Delta t \to \circ} \frac{z - z_\circ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to \circ} \frac{\gamma(t_\circ + \Delta t) - \gamma(t_\circ)}{\Delta t} = \gamma'(t_\circ) \quad (\Delta t > \circ).$$

زاویه‌ای که این بردار مماس با محور xها می‌سازد برابر با $\operatorname{Arg} \gamma'(t_\circ)$ است. تصویر منحنی $\gamma(t)$ تحت نگاشت $f(z)$ منحنی $\tilde{\gamma}(t)$ است که از نقطه $f(z_\circ)$ می‌گذرد. با توجه به مطالب فوق بردار مماس بر $\tilde{\gamma}(t)$ در نقطه $f(z_\circ)$ عبارتست از

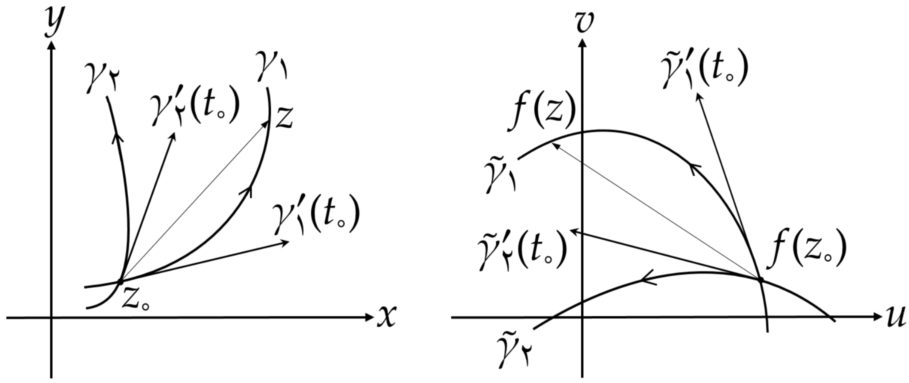
$$\tilde{\gamma}'(t_\circ) = f'(\gamma(t_\circ))\gamma'(t_\circ) = f'(z_\circ)\gamma'(t_\circ).$$

حال اگر $f'(z_\circ) \neq \circ$ در این‌صورت $\tilde{\gamma}'(t_\circ) \neq \circ$. یعنی مماس بر $\tilde{\gamma}(t)$ در نقطه $f(z_\circ)$ موجود و با محور u زاویه $\operatorname{Arg} \tilde{\gamma}'(t_\circ)$ را می‌سازد. لیکن

$$\operatorname{Arg} \tilde{\gamma}'(t_\circ) - \operatorname{Arg} \gamma'(t_\circ) \in \arg f'(z_\circ).$$

یعنی با دوران بردار مماس $\gamma'(t_\circ)$ بر منحنی $\gamma(t)$ در نقطه $z_\circ$ به اندازه $\operatorname{Arg} f'(z_\circ)$ بردار مماس $\tilde{\gamma}'(t_\circ)$ به‌دست می‌آید. چون این مطلب برای تمام منحنی‌های هموار که از $z_\circ$ می‌گذرند برقرار است، پس اگر زاویه بین دو منحنی $\gamma_۱(t)$ و $\gamma_۲(t)$ برابر با α باشد زاویه بین $f(\gamma_۱(t))$ و $f(\gamma_۲(t))$ نیز برابر α است و اگر مماس بر $\gamma_۱(t)$ با چرخش آن به اندازه α در جهت مثلثاتی بر $\gamma_۲(t)$ منطبق گردد مماس بر $f(\gamma_۱(t))$ هم اگر به اندازه α در جهت مثلثاتی دوران نماید بر مماس بر $f(\gamma_۲(t))$ منطبق می‌گردد. پس خاصیت زیر برقرار است. (به شکل ۲.۳ توجه کنید.)

خاصیت ۱.۳ (نگاشت همدیس). اگر تابع f در نقطه $z_\circ$ تحلیلی و $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد، آن‌گاه f در $z_\circ$ همدیس است.



شکل ۲.۳

تذکر. شرط $f'(z_0) \neq 0$ در خاصیت فوق اساسی است. چون اگر $f'(z_0) = 0$ باشد $\arg f'(z_0)$ نامشخص است و روش فوق ارتباطی بین $\operatorname{Arg} \tilde{\gamma}'(t_0)$ و $\operatorname{Arg} \gamma'(t_0)$ ارائه نمی‌دهد.

مثال ۲.۳. تابع $f(z) = z^n$ برای عدد طبیعی n دارای مشتق $f'(z) = nz^{n-1}$ است که برای $z_0 \neq 0$ داریم $f'(z_0) \neq 0$. پس نگاشت آن برای $z_0 \neq 0$ همدیس است. لیکن تصویر شعاع $\gamma = re^{i\theta_0}, r > 0$، که از مبدأ می‌گذرد، تحت این نگاشت می‌شود شعاع $\tilde{\gamma} = r^n e^{in\theta_0}$. یعنی $\operatorname{Arg} \gamma = \theta_0$ لیکن $\operatorname{Arg} \tilde{\gamma} = n\theta_0$. یعنی برای این نگاشت شعاع با آوند θ_0 به شعاع با آوند $n\theta_0$ تصویر می‌شود. پس زاویه بین دو شعاع نیز در تصویر n برابر می‌شود. این اتفاق به‌دلیل غیر همدیس بودن نگاشت $w = z^n$ در مبدأ رخ می‌دهد.

تعیین تصویر یک ناحیه از صفحه z تحت یک نگاشت معین مانند $w = f(z)$ در صفحه w کار مقدماتی است که ممکن است از لحاظ محاسبه آسان نباشد.

با مسئله زیر شروع می‌کنیم.

مسئله: فرض کنید منحنی C در صفحه z با معادله ضمنی به‌صورت $g(x,y) = 0$ و نگاشت $w = f(z) = u + iv$ به‌صورت $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ داده شده باشد. پس در این‌جا سه معادله به‌صورت زیر داریم.

$$g(x,y) = 0 \quad , \quad u = u(x,y) \quad , \quad v = v(x,y).$$

برای تعیین تصویر می‌بایستی بین این سه معادله x و y را حذف نماییم تا یک معادله بر حسب u و v به‌صورت $G(u,v) = 0$ به‌دست آید.

تذکر. توجه کنید معادله $g(x,y) = ۰$ ممکن است بر حسب z و $\bar{z}$ یا بر حسب r و θ نیز داده شده باشد. همچنین تابع $w = f(z)$ ممکن است بر حسب r و θ داده شده باشد. یعنی $v = v(r,\theta)$ و $u = u(r,\theta)$. همچنین منحنی تصویر ممکن است به‌صورت $G(R,\phi) = ۰$ قابل حصول باشد که در آن منظور از R و ϕ متغیرهای مختصات قطبی تصویر می‌باشند، یعنی $w = f(z) = Re^{i\phi}$. بسته به‌این‌که حذف متغیرهای صفحه z با استفاده از کدام نوع از این متغیرها آسان‌تر باشد از آن نوع متغیرها استفاده می‌گردد.

مثال ۳.۳. تصویر دایره $|z-i| = ۲$ را تحت نگاشت $w = \frac{۱}{z}$ به‌دست آورید.

حل. روش اوّل: داریم $|z-i| = ۲$ و $w = \frac{۱}{z}$. اگر بین این دو معادله z را حذف کنیم مجموعه تصویر به‌دست می‌آید. از نگاشت داریم $z = \frac{۱}{w}$. آن را در معادله دایره قرار دهیم می‌شود $\left|\frac{۱}{w} - i\right| = ۲$. حال می‌بایستی آن را ساده کنیم تا تصویر مشخص گردد.

$$\left|\frac{۱}{w} - i\right| = ۲ \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{۱}{w} - i\right)\left(\frac{۱}{\overline{w}} + i\right) = ۴$$

یا

$$\frac{۱}{w\overline{w}} + \frac{i}{w} - \frac{i}{\overline{w}} + ۱ = ۴ \quad \Longleftrightarrow \quad ۱ + i\overline{w} - iw = ۳(u^۲ + v^۲)$$

یا

$$۱ + i(u-iv) - i(u+iv) = ۳(u^۲ + v^۲) \quad \Longleftrightarrow \quad u^۲ + v^۲ - \frac{۲}{۳}v = \frac{۱}{۳}$$

یا

$$u^۲ + (v - \frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|w - \frac{i}{۳}\right| = \frac{۲}{۳}.$$

پس تصویر دایره به‌شعاع $\frac{۲}{۳}$ و به‌مرکز $w_۰ = \frac{i}{۳}$ است.

روش دوم: معادلات را در مختصات دکارتی بنویسیم:

$$|z-i| = ۲ \quad \Longleftrightarrow \quad x^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$$
$$w = \frac{۱}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{x}{x^۲ + y^۲} \quad , \quad v = -\frac{y}{x^۲+y^۲}.$$

بین این سه معادله می‌بایستی x و y را حذف کنیم. پس x و y را اگر از دو معادله آخر بر حسب u و v به‌دست آوریم حل ممکن می‌شود.

$$w = \frac{۱}{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \frac{۱}{w} \quad \Longleftrightarrow \quad x + iy = \frac{۱}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^۲+v^۲}.$$

پس

$$x = \frac{u}{u^۲ + v^۲} \quad , \quad y = -\frac{v}{u^۲ + v^۲}.$$

از قرار دادن آنها در معادله منحنی به‌دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{u}{u^۲ + v^۲}\right)^۲ + \left(-\frac{v}{u^۲ + v^۲} - ۱\right)^۲ = ۴$$

یا

$$u^۲ + (-v - u^۲ - v^۲)^۲ = ۴(u^۲ + v^۲)^۲$$

یا

$$u^۲ + v^۲ + ۲v(u^۲ + v^۲) + (u^۲ + v^۲)^۲ = ۴(u^۲ + v^۲)$$

یا

$$(u^۲ + v^۲)(۳u^۲ + ۳v^۲ - ۲v - ۱) = ۰.$$

چون روی دایره $|z - i| = ۲$، $x^۲ + y^۲ = ۳ + ۲y$ و $-۱ \le y \le ۳$ پس:

$$u^۲ + v^۲ = \left(\frac{x}{x^۲ + y^۲}\right)^۲ + \left(-\frac{y}{x^۲ + y^۲}\right)^۲ = \frac{۱}{x^۲ + y^۲} = \frac{۱}{۳ + ۲y} \ge \frac{۱}{۹}.$$

در نتیجه $u^۲ + v^۲ \neq ۰$ و به‌دست می‌آوریم:

$$۳u^۲ + ۳v^۲ = ۲v + ۱ \quad \Longleftrightarrow \quad u^۲ + (v - \frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}.$$

روش سوم: در صفحه z و صفحه w مختصات قطبی را به‌ترتیب به‌صورت $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ در نظر بگیرید. پس

$$w = Re^{i\phi} = \frac{۱}{r}e^{-i\theta} = \frac{۱}{z}.$$

یا $R = \frac{۱}{r}$ و $\phi = -\theta$. همچنین

$$|z - i| = ۲ \quad \Longleftrightarrow \quad |re^{i\theta} - i| = ۲.$$

حال باید بین سه معادله زیر r و θ را حذف کنیم.

$$\phi = -\theta \quad , \quad R = \frac{۱}{r} \quad , \quad |re^{i\theta} - i| = ۲.$$

پس کافیست در معادله منحنی به‌جای r و θ بر حسب ϕ و R قرار دهیم.

$$|re^{i\theta} - i| = ۲ \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{۱}{R}e^{-i\phi} - i\right| = ۲$$

برای مشاهده تصویر می‌بایستی آن را به‌صورت بهتر بنویسیم.

$$\left|\frac{۱}{R}e^{-i\phi} - i\right| = ۲ \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{۱}{R}e^{-i\phi} - i\right)\left(\frac{۱}{R}e^{i\phi} + i\right) = ۴$$

یا

$$\frac{۱}{R^۲} + i\frac{۱}{R}e^{-i\phi} - i\frac{۱}{R}e^{i\phi} + ۱ = ۴ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{۱}{R^۲} + \frac{۲}{R}\sin\phi = ۳$$

یا

$$۳R^۲ - ۲R\sin\phi = ۱ \quad \Longleftrightarrow \quad ۳(u^۲ + v^۲) - ۲v = ۱$$

یا

$$u^۲ + (v - \frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۴}{۹}.$$

تذکر. بسته به‌این‌که محاسبه کدام یک از مختصات صفحه z بر حسب کدام یک از مختصات صفحه w آسان‌تر باشد از آن مختصات استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشد همیشه معادله منحنی را در صفحه z بر حسب هر سه نوع مختصات z، (x,y) و (r,θ) می‌توان نوشت.

مثال ۴.۳. تصویر خط $x + y = ۱$ را تحت نگاشت $w = z^۲$ به‌دست آورید.

حل. روش اوّل: در مختصات قطبی معادله نگاشت را به‌صورت زیر داریم:

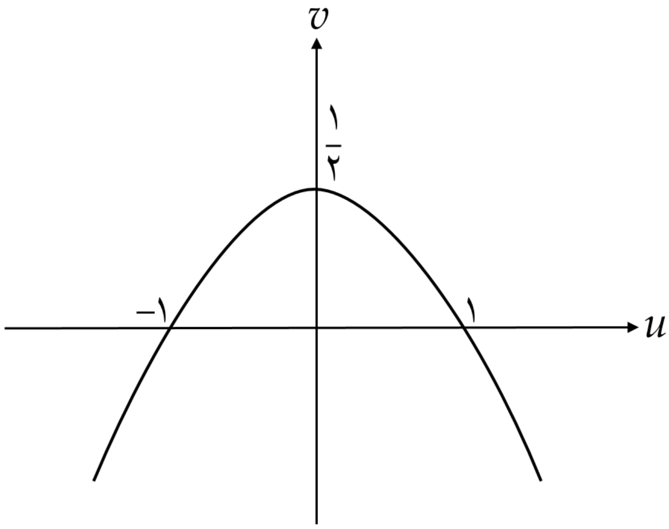
$$z = re^{i\theta} \quad , \quad w = Re^{i\phi} \quad , \quad Re^{i\phi} = r^۲e^{۲i\theta}.$$

پس $R = r^۲$ و $\phi = ۲\theta$ یا $r = \sqrt{R}$ و $\theta = \frac{\phi}{۲}$. حال معادله منحنی را در مختصات قطبی بنویسیم:

$$x + y = ۱ \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{۱}{\cos\theta + \sin\theta}, \quad -\frac{\pi}{۴} < \theta < \frac{۳\pi}{۴}.$$

پس تصویر می‌شود:

$$R = \frac{۱}{\left(\cos\frac{\phi}{۲} + \sin\frac{\phi}{۲}\right)^۲} = \frac{۱}{۱ + \sin\phi} \qquad -\frac{\pi}{۲} < \phi < \frac{۳\pi}{۲}.$$



شکل ۳.۳

نمودار این منحنی را به‌صورت شکل ۳.۳ داریم که یک سهمی است.

روش دوم: در مختصات دکارتی داریم:

$$u = x^۲ - y^۲ \quad , \quad v = ۲xy \quad , \quad x + y = ۱.$$

حال x و y را بین آنها حذف کنیم. از معادله خط داریم $y = ۱ - x$. پس:

$$u = x^۲ - (۱ - x)^۲ = x^۲ - ۱ + ۲x - x^۲ = -۱ + ۲x$$
$$v = ۲x(۱ - x).$$

از معادله اوّل $x = \frac{u+۱}{۲}$. آن را در معادله v قرار دهیم.

$$v = (u + ۱)\left(۱ - \frac{u + ۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(-u^۲ + ۱).$$

یا $v = -\frac{۱}{۲}u^۲ + \frac{۱}{۲}$ که همان سهمی شکل ۳.۳ است.

تذکر. چنان‌چه در مثال فوق معادله خط تغییر کند مثلاً برای خط $۲x + y = ۱$ دیگر روش به‌سادگی کار نخواهد کرد. همچنین اگر نگاشت به‌صورت $w = z^n$، $n \neq ۲$ باشد نیز حتی برای خط $x + y = ۱$ روش دوم مفید نخواهد بود لیکن روش اوّل حل در تمام حالات برای تابع $w = z^n$ مفید است.

مثال ۵.۳. تصویر سهمی $x = y^۲, y \geq ۰$ را تحت نگاشت $w = z^۲$ به‌دست آورید.

حل. اگر در صفحه z مختصات دکارتی $z = x + iy$ و در صفحه w مختصات قطبی $w = Re^{i\phi}$ را در نظر بگیریم. محاسبه x و y بر حسب R و ϕ به‌سادگی انجام می‌شود.

$$w = e^z \quad \Longrightarrow \quad Re^{i\phi} = e^x \cdot e^{iy}.$$

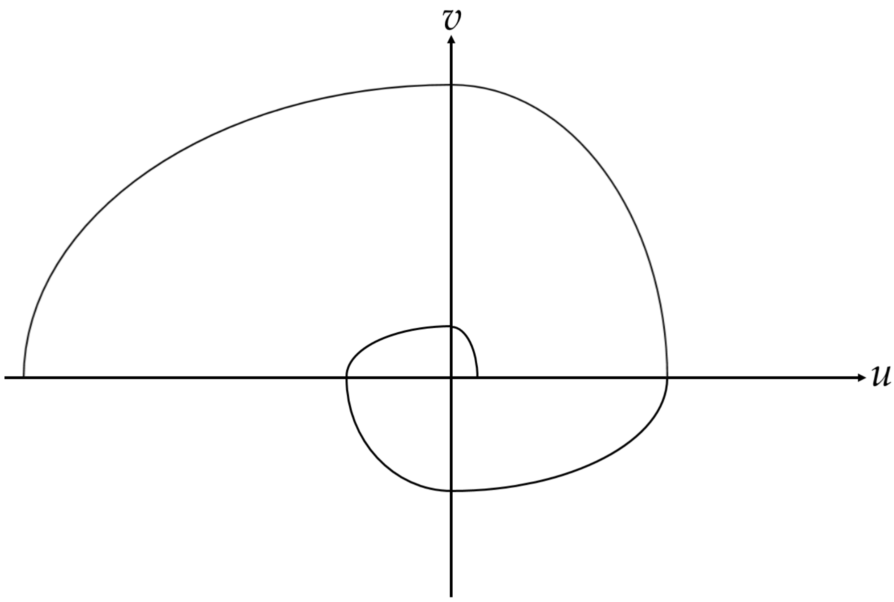
پس سه معادله مطلوب می‌شود:

$$R = e^x \quad , \quad \phi = y \quad , \quad y^۲ = x, \ y \geq ۰.$$

پس $x = \ln R$ و $y = \phi$. از قرار دادن آنها در معادله سهمی به‌دست می‌آوریم.

$$\phi^۲ = \ln R, \quad \phi \geq ۰.$$

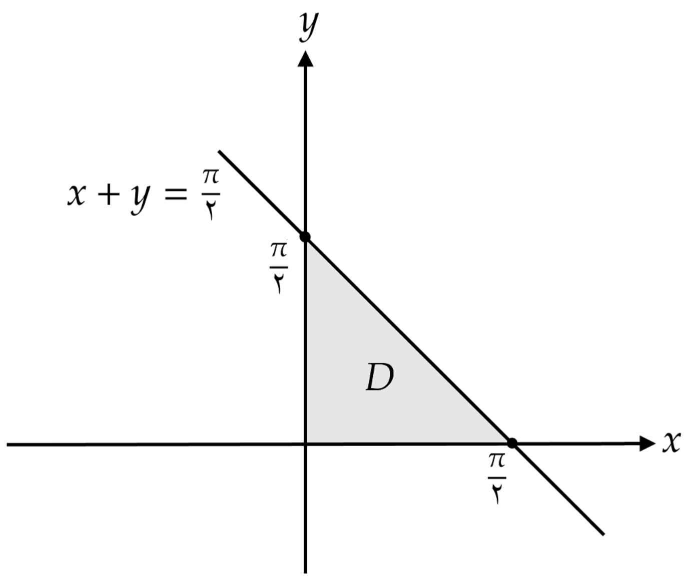
یا $R = e^{\phi^۲}$ ، که تصویر آن یک مارپیچ حول مبدأ به شکل ۴.۳ است.



شکل ۴.۳

تذکر. معمولاً مرز نواحی در صفحه به‌وسیله چند منحنی داده می‌شود که با هم یک منحنی جردن تشکیل می‌دهند. برای تعیین تصویر این ناحیه کافیست که تصویر هر یک از منحنی‌ها را به‌دست آوریم و در این‌صورت این منحنی از صفحه w را به‌دست می‌دهند و یکی از این نواحی می‌تواند جواب مطلوب باشد.

مثال ۶.۳. تصویر میدان $D = \{(x,y) \ : \ x > ۰, y > ۰ x + y < \frac{\pi}{۲}\}$، شکل ۵.۳، را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.



شکل ۵.۳

حل. ابتدا تصویر خط $x+y=\frac{\pi}{2}$ را می‌یابیم. با توجه به مثال قبل می‌دانیم

$$R=e^{x} \quad , \quad \phi=y \qquad \Longrightarrow \quad x=\ln R \ , \ y=\phi.$$

پس تصویر $x+y=\frac{\pi}{2}$ می‌شود $\ln R=\frac{\pi}{2}-\phi$ یا

$$R=e^{\frac{\pi}{2}-\phi} \qquad 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}.$$

تصویر پاره‌خط $x=0, 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ می‌شود $\ln R=0$ و $0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$ یا

$$R=1 \quad , \quad 0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}.$$

و تصویر پاره‌خط $y=0, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ می‌شود $\phi=0$ و $0\leq\ln R\leq\frac{\pi}{2}$ یا

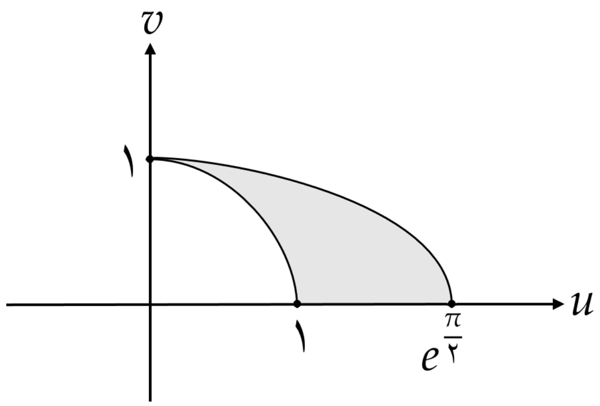
$$\phi=0 \quad , \quad 1\leq R\leq e^{\frac{\pi}{2}}.$$

پس تصویر D تحت $w=e^{z}$ تصویر شکل ۶.۳ است.

برای نگاشت‌ها سه نوع مسئله زیر را داریم.

مسئله نوع اوّل: ناحیه D در صفحه z و نگاشت $w=f(z)$ داده می‌شود و مطلوب $f(D)$ است. حل این‌گونه مسائل مشابه با مثال‌های فوق قابل انجام است.

مسئله نوع دوم: نگاشت $w=f(D)$ و ناحیه $D'=f(D)$ در صفحه w داده می‌شود. مطلوب تعیین



شکل ۶.۳

D است. این نوع مسائل هم شبه مسائل نوع اوّل است. لیکن حل آن بسیار آسان است چون مرز میدان $D' = f(D)$ به‌وسیله منحنی‌هایی مانند $G(u,v) = 0$ داده می‌شود و از $w = f(z)$ داریم $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$. از قرار دادن آنها در $G(u,v) = 0$ فوراً به‌دست می‌آید.

مثال ۷.۳. تصویر معکوس منحنی $v = u^2$ را تحت $w = z^2$ به‌دست آورید.

حل. داریم:

$$u = x^2 - y^2 \quad , \quad v = 2xy \quad , \quad v = u^2.$$

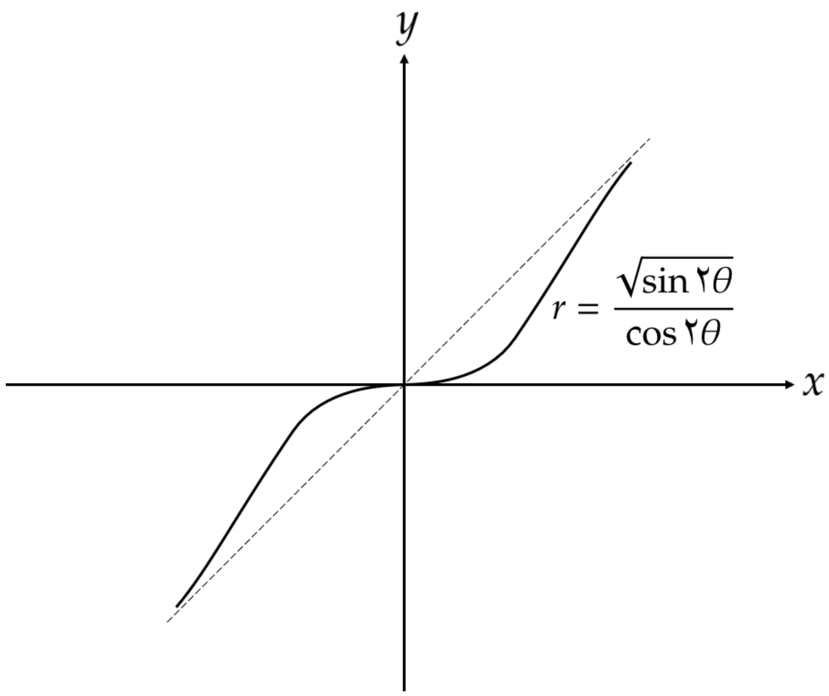
پس تصویر می‌شود:

$$(x^2 - y^2)^2 = 2xy \quad xy > 0,$$

که نمودار این رابطه در ربع اوّل و سوم قرار دارد. برای مشخص شدن دقیق‌تر تصویر آن را در مختصات قطبی می‌نویسیم. تصویر در شکل ۷.۳ ترسیم شده است.

$$r^2 = \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\cos 2\theta}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \text{ و } -\pi < \theta \leq -\frac{3\pi}{4}.$$

مسئله نوع سوم: میدان D در صفحه z و میدان D' در صفحه w داده می‌شود. مطلوب تعیین $f : D \to D'$ است به‌طوری‌که f تحلیلی و یک‌به‌یک و پوشا باشد.

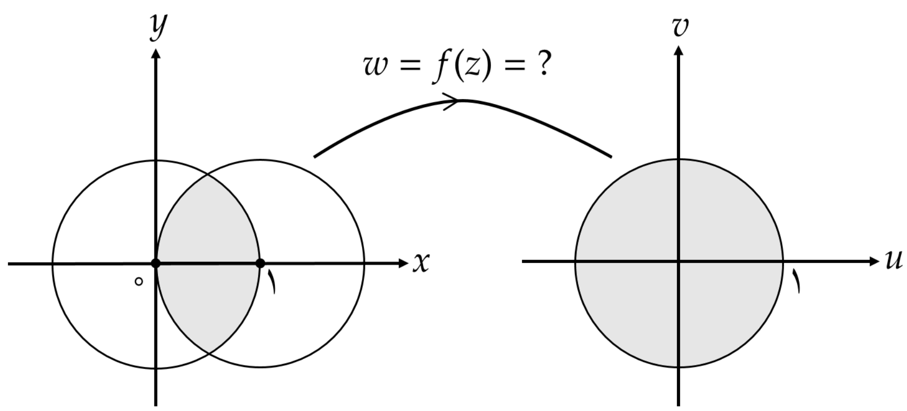


شکل ۷.۳

تذکر. ۱) تبدیل میدان «بد» به میدان «خوب» از این نوع مسائل است. D را به عنوان میدان «بد» می‌گیریم و D' را به عنوان میدان «خوب».

۲) حل این نوع مسئله با معلومات فعلی نه چندان که ساده نیست بلکه غیرممکن است.

مثال ۸.۳. ناحیه بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z - ۱| = ۱$ را با یک تابع تحلیلی به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید. (به شکل ۸.۳ توجه کنید.)



شکل ۸.۳

برای حل این‌گونه مسائل می‌بایستی شناختی از رفتار هندسی نگاشت‌های شناخته شده داشته باشیم تا با استفاده از آنها مسئله را حل کنید. این شناخت در بخش ۲.۳ داده می‌شود.

تمرین ۱.۳

۱. تعیین کنید هر یک از توابع زیر در کدام نقاط همدیس است.

آ) $f(z) = z^۴ + z^۲$

ب) $f(z) = \sin z$

ج) $f(z) = e^{z^۳}$

د) $f(z) = \tan z$

۲. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = (۱-i)z + ۲ - i$ به‌دست آورید.

آ) خط $y = -۱$.

ب) دیسک $|z - ۳| < ۲$.

ج) سهمی $y = ۱ - x^۲$.

د) $\{x > ۰, y > ۰, x + ۲y > ۳\}$.

۳. تصویر هر یک از نواحی زیر را تحت نگاشت $w = \frac{۱}{z}$ به‌دست آورید.

آ) هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$.

ب) سهمی $x = y^۲$.

ج) $\{-۲ < x < -۱, |y| < ۱\}$.

د) $\{y < ۱ - x^۲, x > ۰, y > ۰\}$.

۴. تصویر نواحی زیر را تحت نگاشت $w = z^۲$ به‌دست آورید.

آ) خط $x = ۲$ و $y = ۳$.

ب) خط $۲x + ۳y = ۱$.

ج) میدان $|z| > ۱$ و $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{۴}$.

د) $\{y > x^۲, x > ۰, y > ۰\}$.

۵. تصویر نواحی زیر را تحت $w = z^۳$ تعیین کنید.

آ) خط $x = 1$ و $y = -1$.
ب) خط $x + y = 1$.
ج) میدان $|z| < 1$ و $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{6}$.
د) $\{y > x^2, x > 0, y > 0\}$.

۶. تصویر نواحی زیر را تحت $w = e^z$ به‌دست آورید.

آ) خط $x + y = 1$.
ب) منحنی $x^2 - y^2 = 1$.
ج) $\{x > 0, y > 0, x < 1 - y^2\}$.
د) $\{0 < y < \frac{\pi}{2}, x > 0\}$.

۷. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt{z}$ به‌دست آورید.

آ) خط $x - y = 1$.
ب) نیم‌دایره $x^2 + y^2 = 1, y > 0$.
ج) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.
د) $\{y > 0, y < 1 - x^2\}$.

۸. تصویر نواحی زیر را تحت شاخه اصلی نگاشت $w = \sqrt[4]{z}$ تعیین کنید.

آ) خط $x = 1$ و $y = 1$.
ب) خط $x + y = 1$.
ج) $\{x > 0, y = 1 - x^2\}$.
د) $\{x > 0, y > 0, x + y < 1\}$.

۹. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت $w = \sin z$ بیابید.

آ) خط $x = \frac{\pi}{4}$ و $y = 1$.
ب) خط $x = \frac{\pi}{2}$ و $y = 0$.
ج) $\{y > 0, |x| < \frac{\pi}{2}\}$.
د) $\{1 < y < 2, |x| < \frac{\pi}{4}\}$.

۲.۳ تبدیل مبیوس

هدف از این بخش بررسی خواص هندسی تبدیل مبیوس است که رکن اساسی در حل مسایل نوع سوم نگاشت‌ها، اشاره شده در بخش ۱.۳، می‌باشد.

تبدیل مبیوس: نگاشت زیر را که در آن a و b و c و d اعداد ثابت‌اند. نگاشت مبیوس یا تبدیل مبیوس یا تبدیل دوخطی گویند.

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

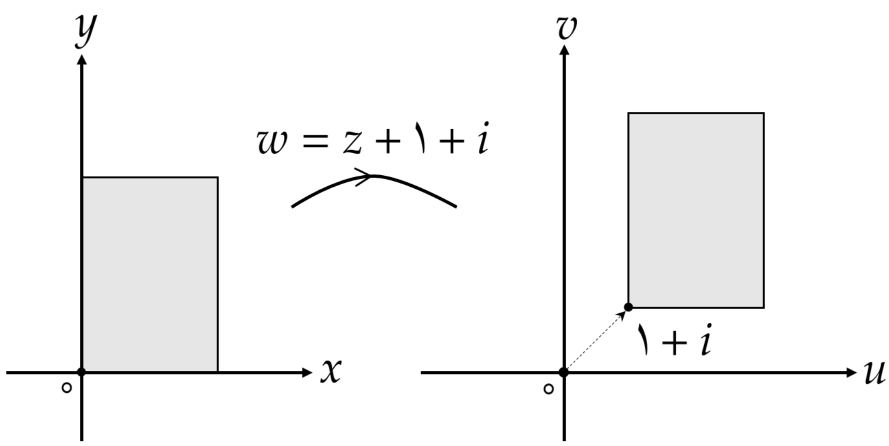
توجه کنید اگر $ad - bc = 0$ در این‌صورت این نگاشت به $w = \frac{a}{c}$ یعنی تابع ثابت تبدیل می‌گردد. برای بررسی هندسی این نگاشت ابتدا دو حالت خاص آن را بررسی می‌کنیم. با استفاده از نتایجی که از این دو حالت به‌دست می‌آید حالت کلی را بررسی می‌کنیم.

حالت خاص ۱: نگاشت خطی $w = az + b$.

بسته به‌این‌که مقادیر a و b چه باشد این نگاشت اعمال هندسی گوناگونی را تشریح می‌کند.

الف: $a = 1$ و $b \neq 0$ یعنی $w = z + b$.

هر نقطه مانند z از صفحه دامنه به اندازه بردار b انتقال می‌یابد تا نقطه تصویر را به‌دست دهد. پس در این حالت یک انتقال داریم. (به شکل ۹.۳ توجه کنید.)



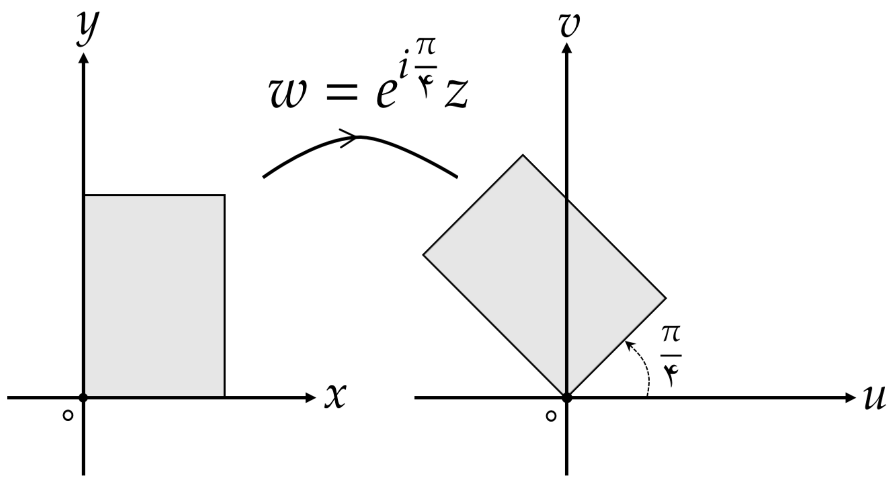
شکل ۹.۳: نگاشت انتقال $z \to z + 1 + i$.

ب: $a = e^{i\theta_0}$ و $b = 0$ یعنی $w = e^{i\theta_0} z$.

در این حالت $|w| = |z|$ و $\arg w = \arg z + \theta_0$. یعنی هر نقطه از صفحه z به اندازه زاویه θ_0 حول مبدأ دوران می‌کند تا نقطه تصویر در صفحه w به‌دست آید. پس در این حالت یک دوران داریم. (به شکل ۱۰.۳ توجه کنید.)

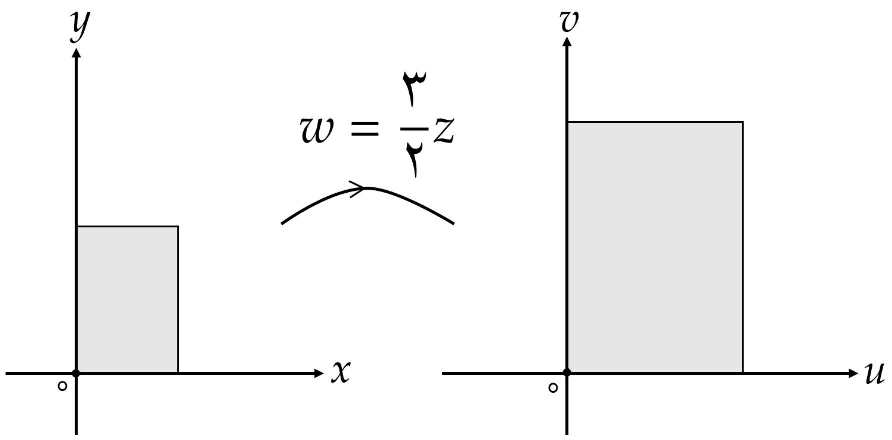
ج: $a = r_0 > 0$ و $b = 0$ یعنی $w = r_0 z$.

در این حالت $\arg w = \arg z$ و $|w| = r_0 |z|$. یعنی فاصله هر نقطه در r_0 ضرب می‌شود و در امتداد شعاع خود جابه‌جا می‌شود تا نقطه تصویر در صفحه w به‌دست آید. اگر $r_0 > 1$ باشد افزایش طول داریم. در این حالت می‌گوییم نگاشت انبساطی است. اگر $0 < r_0 < 1$ باشد کاهش طول داریم. در این



شکل ۳.۱۰: نگاشت دوران به اندازه زاویه $\frac{\pi}{۴}$.

حالت می‌گویند نگاشت انقباضی است. (به شکل ۳.۱۱ توجه کنید.)



شکل ۳.۱۱: نگاشت تجانس با ضریب $\frac{۳}{۲}$

د: $w = az + b$ و $a \neq ۰$.

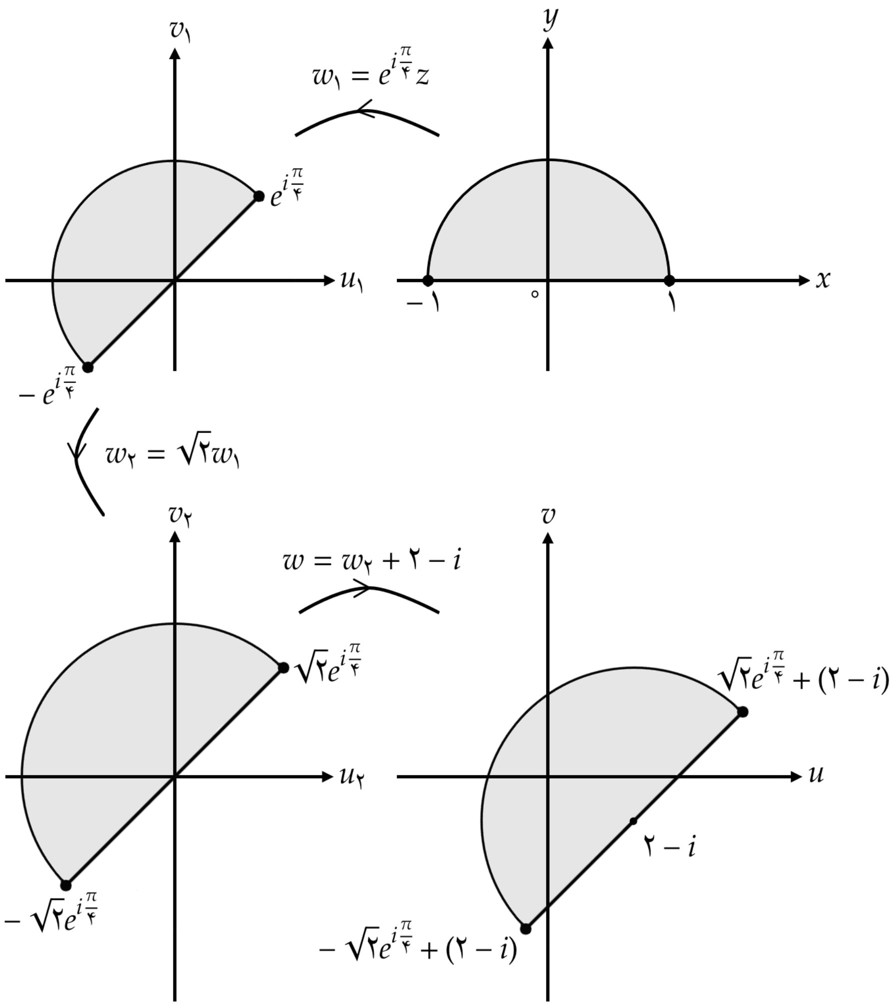
در این حالت $a = r_۰e^{i\theta_۰}$ است و $w = r_۰e^{i\theta_۰}z + b$. حال بگیرید $w_۱ = e^{i\theta_۰}z$ که یک دوران به اندازه $\theta_۰$ است. $w_۲ = r_۰w_۱$ که یک انبساط یا انقباض به اندازه $r_۰$ و سرانجام $w = w_۲ + b$ که یک انتقال است.

مثال ۳.۹. تصویر نیم‌دایره بالائی دایره واحد را تحت نگاشت $w = (۱ + i)z + ۲ - i$ به‌دست آورید.

حل. روش اوّل: این نگاشت را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$w = \sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}z + ۲ - i = w_۲ + ۲ - i, \quad w_۲ = \sqrt{۲}w_۱, \quad w_۱ = e^{i\frac{\pi}{۴}}z.$$

حال آن را متوالیاً روی این نیم‌دایره اعمال می‌کنیم. (به شکل ۱۲.۳ توجه کنید.)



شکل ۱۲.۳: نگاشت $z \to (۱+i)z + ۲ - i$.

پس تصویر نیم‌دایره‌ای به‌مرکز $۲-i$ و شعاع $\sqrt{۲} = |\sqrt{۲}e^{i\frac{\pi}{۴}}|$ است که در سمت چپ خط $v = u - ۳$ یا ناحیه $v > u - ۳$ قرار دارد. پس تصویر می‌شود:

$$\left\{w : |w - ۲ + i| < \sqrt{۲}, v > u - ۳\right\}.$$

تذکر. البته تعیین تصویر با روش جبری که در بخش گذشته به‌کار بردیم امکان‌پذیر است. لیکن آن روش مفاهیم هندسی را در بر ندارد و در نتیجه به حل مسئله نوع سوم نگاشت‌ها کمکی نمی‌کند.

روش جبری: روش دوم به‌صورت زیر است.

$$w = (۱+i)z + ۲ - i \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{۱}{۱+i}(w - ۲ + i)$$

و

$$u + iv = (1 + i)(x + iy) + 2 - i.$$

پس:

$$u = x - y + 2 \quad , \quad v = y + x - 1.$$

از این دو معادله به‌دست می‌آوریم $y = \frac{1}{2}(v - u - 3)$. پس:

$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{w - 2 + i}{1 + i}\right| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |w - 2 + i| < \sqrt{2}.$$

و

$$y > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(v - u - 3) > 0 \quad \Longrightarrow \quad v > u - 3.$$

نکته. نگاشت خطی هر شکل هندسی را به شکل هندسی مشابه آن می‌نگارد. پس خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۳.۲. نگاشت خطی، خط را به خط و دایره را به دایره می‌نگارد.

حالت خاص ۲: نگاشت معکوس $w = \frac{1}{z}$.

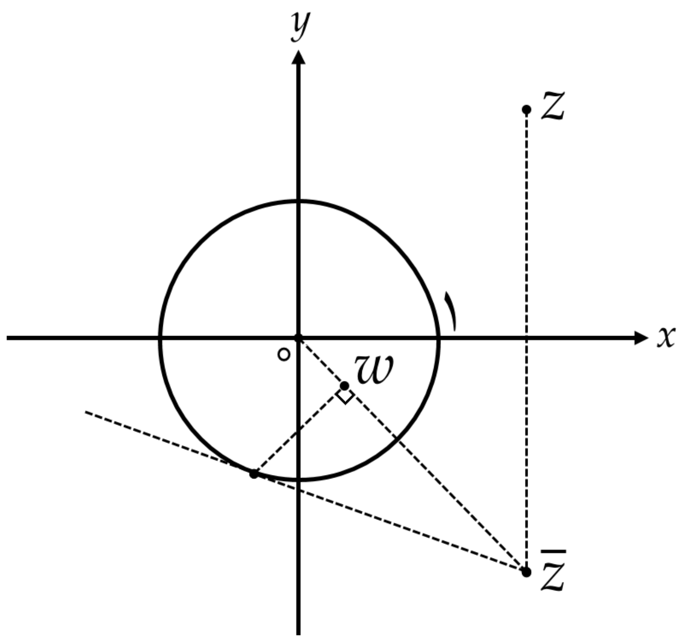
در مختصات قطبی داریم:

$$w = Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

پس تحت نگاشت معکوس $R = \frac{1}{r}$ و $\phi = -\theta$. یعنی تصویر نقطه z در امتداد شعاع $\overline{z}$ و به فاصله $\frac{1}{r}$ تا مبدأ قرار دارد. به‌این‌ترتیب نقاط خارج دایره واحد به داخل دایره واحد و نقاط داخل دایره واحد به خارج دایره واحد، نقاط نیم‌صفحه بالائی به نیم صفحه پایینی و نیم‌صفحه پایینی به نیم‌صفحه بالائی نگاشته می‌شود.

به‌صورت هندسی نقاط تصویر به‌صورت ذیل قابل وصول است. ابتدا از روی نقطه z داده شده $\overline{z}$ را در صفحه z مشخص و از این نقطه بر دایره واحد خط مماس را رسم کنید. از نقطه تماس خط عمود بر امتداد شعاعی که از $\overline{z}$ می‌گذرد را رسم کنید. نقطه تلاقی این دو خط همان $w = \frac{1}{z}$ است. (به شکل ۱۳.۳ توجه کنید.)

یک خاصیت با ارزش این نگاشت، خاصیت زیر است.



شکل ۱۳.۳: نگاشت $z \to w = \frac{1}{z}$.

خاصیت ۳.۳. نگاشت معکوس $w = \frac{1}{z}$ خط و دایره را به خط یا دایره می‌نگارد.

علت. صورت کلی معادله خط و دایره به‌شکل زیر است.

$$A(x^{2} + y^{2}) + Bx + Cy + D = 0.$$

که در آن A، B، C و D اعدادی حقیقی و ثابت هستند. برای $A \neq 0$ دایره داریم و برای $A = 0$ خط داریم. این معادله بر حسب z و $\overline{z}$ به‌صورت زیر در می‌آید.

$$Az\overline{z} + B\frac{z+\overline{z}}{2} + C\frac{z-\overline{z}}{2i} + D = 0.$$

برای به‌دست آوردن تصویر کافیست در این معادله z را با $\frac{1}{w}$ و $\overline{z}$ را با $\frac{1}{\overline{w}}$ جایگزین کنیم تا به‌دست آوریم.

$$A\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\overline{w}} + B\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{\overline{w}}}{2} + C\frac{\frac{1}{w}-\frac{1}{\overline{w}}}{2i} + D = 0$$

یا

$$A + B\frac{w+\overline{w}}{2} - C\frac{w-\overline{w}}{2i} + Dw\overline{w} = 0$$

یا

$$D(u^{2} + v^{2}) + Bu - Cv + A = 0$$

که معادله خط یا دایره در صفحه w است.

تذکر. ۱) اگر $D = 0$ و $A \neq 0$ در صفحه z یک دایره داریم که از مبدأ می‌گذرد و در صفحه w تصویر یک خط است که از مبدأ نمی‌گذرد.

۲) $D = 0$ و $A = 0$. در این حالت در صفحه z یک خط داریم که از مبدأ می‌گذرد. در صفحه w تصویر نیز یک خط است که از مبدأ می‌گذرد.

۳) $D \neq 0$ و $A = 0$. در این حالت در صفحه z یک خط داریم که از مبدأ نمی‌گذرد لیکن تصویر یک دایره است که از مبدأ می‌گذرد.

۴) $D \neq 0$ و $A \neq 0$. در این حالت در صفحه z یک دایره داریم که از مبدأ نمی‌گذرد. در صفحه w تصویر نیز یک دایره است که از مبدأ نمی‌گذرد.

حالت کلی نگاشت مبیوس: صورت کلی تبدیل مبیوس عبارتست از

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0.$$

۱. اگر $c = 0$ در این‌صورت $ad \neq 0$ و $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ که همان نگاشت خطی است.

۲. اگر $c \neq 0$ آن را به‌صورت زیر می‌توان نوشت.

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d}.$$

حال بگیرید $w_1 = cz+d$ و $w_2 = \frac{1}{w_1}$ و $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}w_2$. پس برای $c \neq 0$ یک تبدیل مبیوس ترکیبی از دو نگاشت خطی و یک نگاشت معکوس است. پس خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۴.۳. یک تبدیل مبیوس خط و دایره را بر خط یا دایره می‌نگارد.

۳. مشتق آن را به‌صورت زیر داریم.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

پس این نگاشت برای $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$، همدیس است.

۴. برای $cz+d \neq 0$ نگاشت مبیوس را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$Azw + Bz + cw + D = 0.$$

که هم نسبت به z و هم نسبت به w خطی است. به‌این‌دلیل آن را دوخطی نیز گویند.

۵. نگاشت معکوس یک نگاشت مبیوس خود یک نگاشت مبیوس است.

۶. نگاشت مبیوس را از دامنه $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$ به‌صورت زیر می‌توان به دامنه $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ گسترش داد.

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{-\frac{d}{c}\}$$
$$T(-\frac{d}{c})=\infty$$
$$T(\infty)=\frac{a}{c}.$$

توجه کنید $T:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\}$، یک‌به‌یک و پوشا است.

دامنه $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ را صفحه مختلط توسعه یافته می‌گویند.

برای بیان خاصیت دیگری از نگاشت مبیوس مفهوم زیر را داریم.

نقطه ثابت: نقطه z_0 را یک نقطه ثابت تابع $f(z)$ گوییم هرگاه $f(z_0)=z_0$.

خاصیت ۳.۵. هر نگاشت مبیوس حداکثر دو نقطه ثابت دارد. مگر این‌که نگاشت یکسان $w=z$ باشد.

علت. اگر نگاشت $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ دارای نقطه ثابت z_0 باشد در این‌صورت

$$\frac{az_0+b}{cz_0+d}=z_0$$

یا

$$cz_0^2-(a-d)z_0-b=0.$$

اگر $c\neq 0$ در این حالت دو نقطه ثابت داریم. اگر $c=0$ و $a-d\neq 0$ یک نقطه ثابت داریم. اگر $c=0$ و $a-d=0$ باشد در این حالت نگاشت یک انتقال است و نقطه ثابت ندارد. اگر $c=0$، $a-d=0$ و $b=0$ باشد در این حالت $w=z$ یا نگاشت یکسان داریم. در این حالت تمام نقاط $\mathbb{C}$ ثابت‌اند.

مثال ۳.۱۰. نقاط ثابت نگاشت مبیوس $w=\frac{z+i}{z-1}$ را بیابید.

حل. باید معادله $\frac{z+i}{z-1}=z$ را برای z حل کنیم.

$$\frac{z+i}{z-1}=z \quad\Longrightarrow\quad z^2-2z-i=0 \quad\Longrightarrow\quad z=1\pm\sqrt{1+i}.$$

پس $z=1\pm\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ دو نقطه ثابت است.

خاصیت ۶.۳ (قضیه سه نقطه و سه تصویر). فرض کنید سه نقطه متمایز z_1، z_2 و z_3 در صفحه مختلط توسعه یافته z، یعنی $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ و سه نقطه متمایز w_1، w_2 و w_3 در صفحه مختلط توسعه یافته w داده شده باشد. در این‌صورت نگاشت مبیوس یگانه مانند $w = T(z)$ موجود است به‌طوری‌که $T(z_k) = w_k$ برای $k = 1,2,3$. این نگاشت با استفاده از فرمول زیر قابل تعیین است.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

که در آن اگر یکی از داده‌ها ∞ باشد کسر مربوط به آن حذف می‌گردد.

نکته. فرمول فوق را نسبت صلیبی گویند.

علت. دو نگاشت مبیوس زیر را در نظر بگیرید.

$$F(w) = \frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1} \quad , \quad G(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

برای آنها داریم.

$$F(w_1) = G(z_1) = 0$$

$$F(w_2) = G(z_2) = 0$$

$$F(w_3) = G(z_3) = \infty.$$

حال بگیرید $T = F^{-1}G$. در این‌صورت طبق ویژگی ۵ فوق $T(z)$ یک نگاشت مبیوس است. $T(z)$ سه نقطه ثابت z_1، z_2 و z_3 دارد که به‌ترتیب آنها را بر سه نقطه w_1، w_2 و w_3 می‌نگارد. یعنی $T(z_k) = w_k$ برای $k = 1,2,3$.

برای یگانگی این نگاشت فرض کنید دو نگاشت $T_1(z)$ و $T_2(z)$ با مشخصات فوق موجود باشد. در این‌صورت $T(z) = T_1^{-1}T_2(z)$ یک نگاشت مبیوس با سه نقطه ثابت متمایز z_1، z_2 و z_3 است. پس طبق خاصیت ۵.۳ تابع یکسان است. یعنی $T_1T_2^{-1}(z) = z$ یا $T_1(z) = T_2(z)$.

مثال ۱۱.۳. نگاشت مبیوسی را بیابید که ۰، ۱ و i را بر سه نقطه i، ۲− و ∞ بنگارد.

حل. چون $w_3 = \infty$ است پس کسر مربوط به آن حذف می‌گردد. پس نسبت صلیبی می‌شود:

$$\frac{w-w_1}{w_2-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

یا

$$\frac{w-i}{-2-i} = \frac{z-0}{z-i}\cdot\frac{1-i}{1-0} \quad \Longrightarrow \quad w = (1-i)(-2-i)\frac{z}{z-i}+i$$

یا

$$w = \frac{(2i-3)z+1}{z-i}.$$

تذکر. ممکن است به‌نظر برسد در نگاشت مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$ چهار ثابت اختیاری داریم. از قرار دادن نقاط (z_1, w_1)، (z_2, w_2) و (z_3, w_3) در آن، سه معادله با چهار مجهول به‌دست می‌آید و از حل آنها a، b، c و d به‌دست می‌آید. باید گفتن اولاً در تابع فوق فقط سه ثابت انتخابی داریم چون اگر $d \neq 0$ باشد از تقسیم صورت و مخرج بر d سه ثابت اختیاری ظاهر می‌شود. ثانیاً حل آن دستگاه سه معادله و سه مجهول در کلیت آسان نیست به‌خصوص وقتی که یکی از داده‌ها ∞ باشد.

دو نگاشت زیر در حل مسائل نوع سوم، یعنی D و D' داده شده و مطلوب $f : D \to D'$ تحلیلی، یک‌به‌یک و پوشا، زیاد استفاده می‌گردد.

نگاشت نیم‌صفحه بالائی به دیسک واحد: اگر $\Im z_0 > 0$ باشد آن‌گاه نگاشت زیر نیم‌صفحه بالائی را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد می‌نگارد و z_0 را به مبدأ می‌برد.

$$w = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

علت. اگر z در نیم‌صفحه بالائی باشد، $|z - z_0| < |z - \bar{z}_0|$. پس برای z در نیم‌صفحه بالائی داریم $|w| < 1$. اگر z روی محور حقیقی باشد در این‌صورت $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$. پس $|w| = 1$. اگر z در نیم‌صفحه پایینی باشد در این‌صورت $|z - z_0| > |z - \bar{z}_0|$ پس $|w| > 1$. به‌این‌ترتیب هر نقطه از نیم‌صفحه بالائی به داخل دیسک واحد و هر نقطه از محور حقیقی بر محور حقیقی و هر نقطه از نیم‌صفحه پایینی بر یک نقطه از نیم‌صفحه پایینی نگاشته می‌شود. چون نگاشت مبیوس یک‌به‌یک و پوشا است پس تصویر نیم‌صفحه بالائی داخل دیسک واحد است.

نکته. در استفاده از نگاشت فوق انتخاب z_0 بر عهده استفاده کننده است. بهترین انتخاب برای z_0، $z_0 = i$ است چون محاسبه‌های بعدی ساده‌تر انجام می‌شود. یعنی نگاشت مطلوب $w = \frac{z-i}{z+i}$ است.

نگاشت دوم را به‌صورت زیر داریم.

دیسک واحد بر دیسک واحد: اگر z_0 در داخل دیسک واحد باشد آن‌گاه نگاشت

$$w = \frac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$$

به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا دیسک واحد را بر دیسک واحد و نقطه $z_\circ$ را بر $\circ$ می‌نگارد.

علت. اگر z یک نقطه بر روی دایره واحد باشد آن‌گاه $z\overline{z} = ۱$. پس برای این نقطه داریم:

$$|w| = \left|\frac{z - z_\circ}{\overline{z}_\circ z - ۱}\right| = \left|\frac{z - z_\circ}{\overline{z}_\circ z - z\overline{z}}\right| = \frac{|z - z_\circ|}{|z| \cdot |\overline{z}_\circ - \overline{z}|} = \frac{۱}{|z|} = ۱.$$

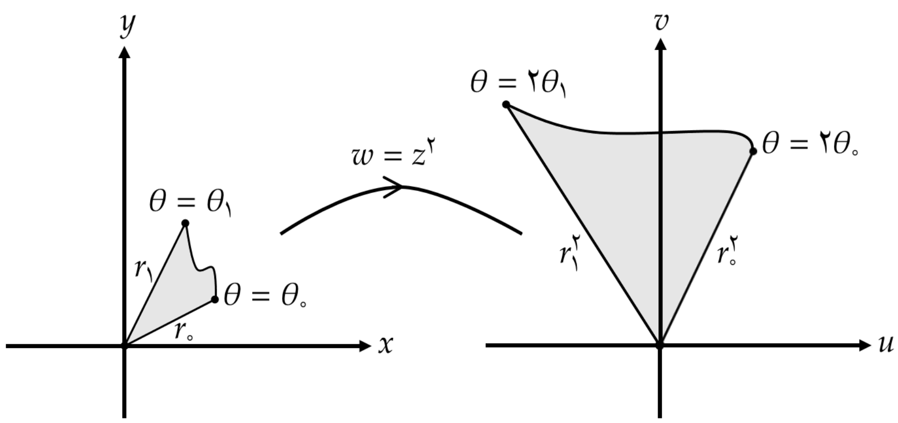
پس تصویر هر نقطه از دایره واحد، یک نقطه از دایره واحد در صفحه w است. چون معکوس این‌نگاشت به‌شکل خود آن است پس تصویر معکوس هر نقطه از دایره واحد یک نقطه از دایره واحد است. به‌این‌ترتیب دایره واحد به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا نگاشته می‌شود. پس داخل دایره واحد می‌بایستی بر داخل دایره واحد یا خارج آن نگاشته شود. چون $z_\circ$ بر $\circ$ نگاشته می‌شود پس داخل دایره واحد به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر داخل دایره واحد نگاشته می‌شود.

از سایر نگاشت‌ها دو نگاشت زیر در حل مسئله نوع سوم مفیدتراند.

نگاشت $w = z^n$: برای ارتباط بین نقاط و تصویر آنها از مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. برای $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$، که در آن $r, R \geq \circ$ و $-\pi < \theta, \phi \leq \pi$، داریم.

$$w = z^n \quad \Longrightarrow \quad Re^{i\phi} = r^n e^{in\theta} \quad \Longrightarrow \quad R = r^n \;,\; \phi = n\theta.$$

یعنی آوند تصویر هر نقطه n برابر و طول آن به‌توان n می‌رسد. پس تصویر شعاع $\theta = \theta_\circ$ در صفحه z شعاع $\phi = n\theta$ در صفحه w است. در نتیجه میدان $\theta_\circ < \theta < \theta_۱$ بر میدان $n\theta_\circ < \theta < n\theta_۱$ نگاشته می‌شود. (به شکل ۱۴.۳ توجه کنید.)



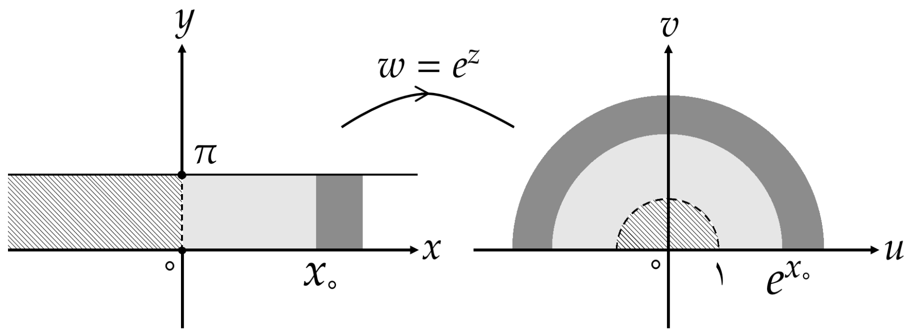
شکل ۱۴.۳: نگاشت $z \to z^۲$.

نکته. مطالب فوق برای شاخه اصلی $w = z^{\frac{1}{n}}$ نیز درست است.

نگاشت $w = e^z$: برای بررسی این نگاشت می‌گیریم:

$$z = x + iy \quad , \quad w = Re^{i\phi}$$
$$w = e^z \quad \Longrightarrow \quad Re^{i\phi} = e^x \cdot e^{iy} \quad \Longrightarrow \quad R = e^x \ , \ \phi = y.$$

پس تحت این نگاشت میدان $\infty > x > \infty-$ و $\pi > y > 0$ به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر نیم‌صفحه بالائی $R > 0$ و $0 < \phi < \pi$ نگاشته می‌شود.(به شکل ۱۵.۳ توجه کنید.)



شکل ۱۵.۳: نگاشت $z \to e^z$.

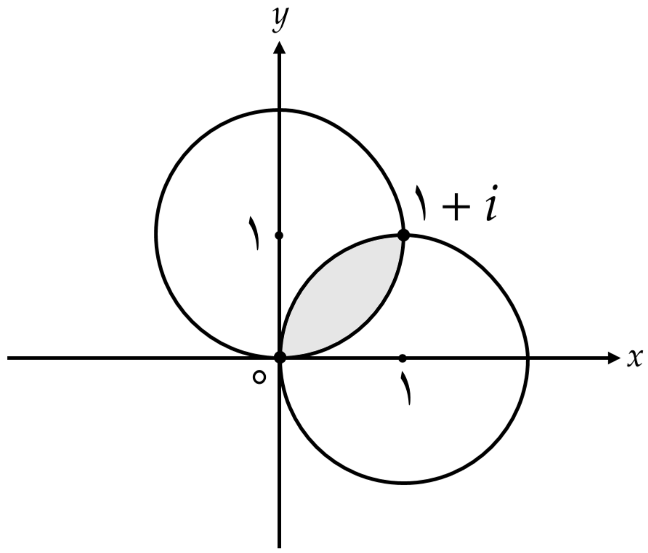
مثال ۱۲.۳. میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - i| = 1$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

حل. راه حل را با استفاده از شکل بررسی می‌کنیم. میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z - i| = 1$ به‌صورت شکل ۱۶.۳ می‌باشد.

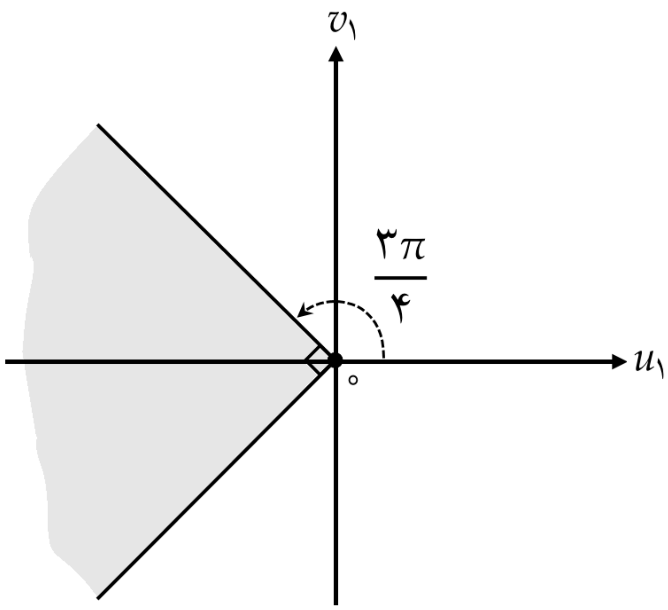
می‌دانیم تبدیل مبیوس دایره را به خط یا دایره تبدیل می‌کند. اگر $\infty \longmapsto 0$ و $0 \longmapsto 1 + i$ ببریم تصویر میدان شکل ۱۶.۳ یک زاویه خواهد شد. پس $w_1 = \frac{z-1-i}{z}$ میدان داده شده را به تصویر شکل ۱۷.۳ می‌نگارد.

اگر این زاویه یک ضلع آن قسمت مثبت محور حقیقی باشد نگاشت توانی آن را به نیم‌صفحه تبدیل می‌کند. با دوران $\frac{3\pi}{4}$ در خلاف جهت مثلثاتی توسط نگاشت $w_2 = e^{-\frac{3}{4}\pi i}w_1$، تصویر شکل ۱۸.۳ به‌دست می‌آید.

حال با $w_3 = w_2^2$ نیم‌صفحه بالائی، یعنی تصویر شکل ۱۹.۳ حاصل می‌شود.



شکل ۳.۱۶: میدان بین دو دایره $|z-۱|=۱$ و $|z-i|=۱$.

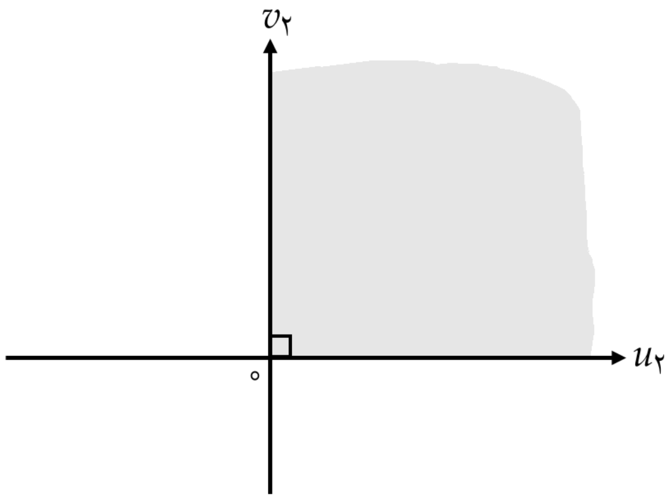


شکل ۳.۱۷

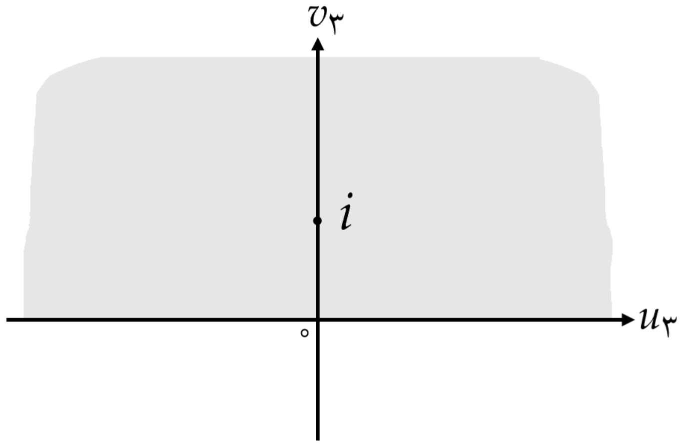
بالاخره با نگاشت $w=\frac{w_۳-i}{w_۳+i}$ نیم‌صفحه بالائی را بر دیسک واحد، یعنی تصویر شکل ۳.۲۰ می‌نگاریم.

ترکیب این نگاشت‌ها نگاشت مطلوب است که به‌صورت زیر است.

$$w=\frac{(z-۱-i)^۲-z^۲}{(z-۱-i)^۲+z^۲}.$$



شکل ۱۸.۳



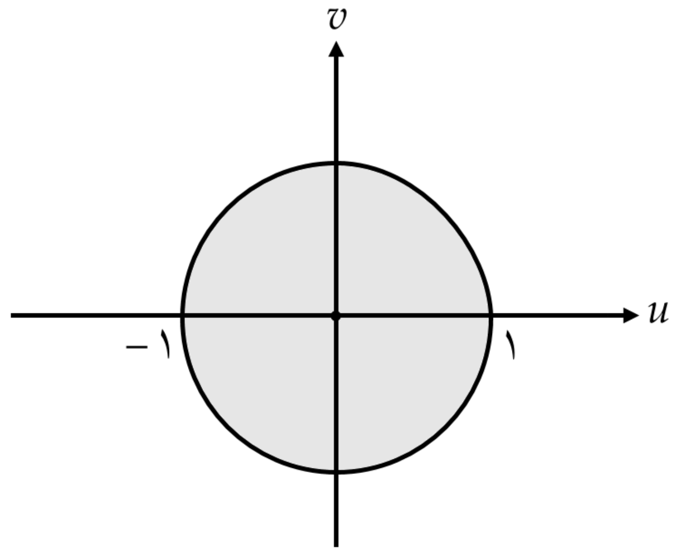
شکل ۱۹.۳

نکته. توجه کنید حل مسئله معادله لاپلاس روی دیسک واحد با شرط مرزی صفر با استفاده از صورت قطبی معادله لاپلاس و روش‌های فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای قابل انجام است. لیکن روی میدان بین دو دایره مثال قبل توسط مطالب فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای قابل حل نیست.

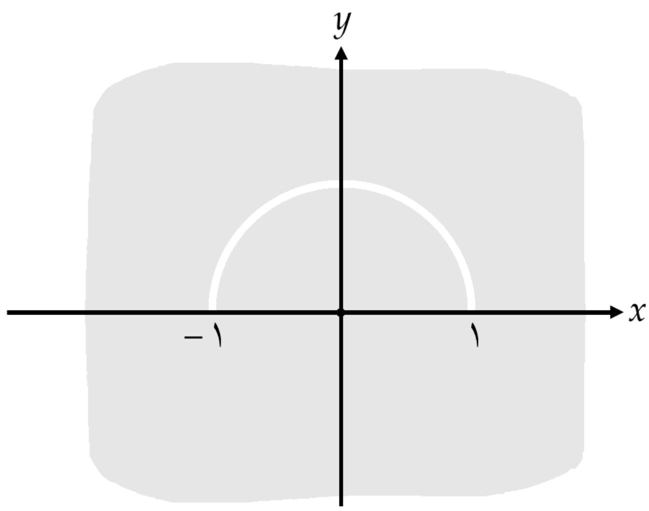
مثال ۱۳.۳. تمام صفحه z غیر از قسمت بالائی نیم‌دایره واحد را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

تذکر. برای حل این‌گونه مسائل می‌بایستی میدان اولیه را به نیم‌صفحه بالائی بنگاریم و برای نیم‌صفحه بالائی می‌بایستی یک زاویه به راس مبدأ داشته باشیم و برای تشکیل زاویه می‌بایستی از تبدیل مبیوس استفاده کرد و پاره‌خط یا قوسی از دایره را به شعاع تبدیل کرد.

حل. مجموعه دامنه را به‌صورت شکل ۲۱.۳ داریم.



شکل ۲۰.۳

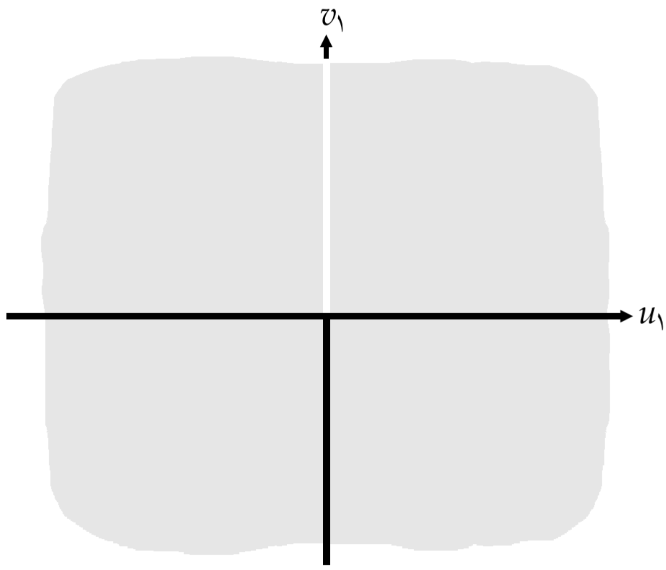


شکل ۲۱.۳

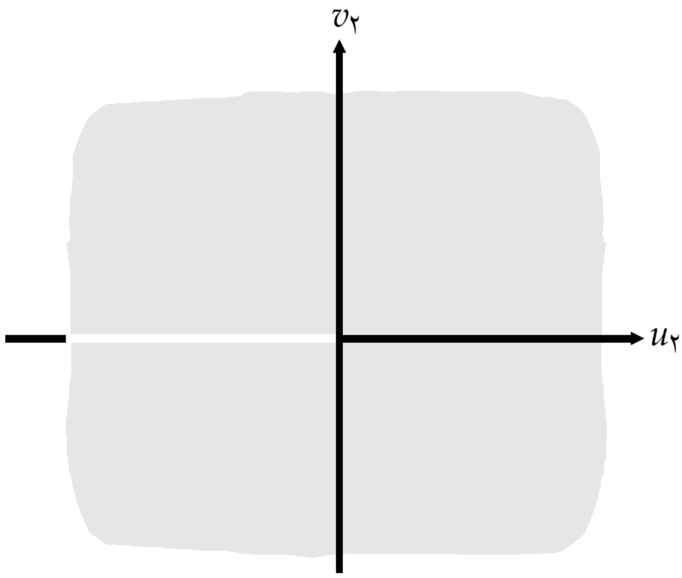
ابتدا این قوس را به یک شعاع تبدیل می‌کنیم. با نگاشت مبیوس

$$w_۱ = \frac{z-۱}{z+۱}$$

تصویر قوس، قسمت مثبت محور موهومی می‌شود و تصویر به‌صورت شکل ۲۲.۳ حاصل می‌گردد. تحت دوران $w_۲ = e^{i\frac{\pi}{۲}} w_۱$ تصویر شکل ۲۳.۳ به‌دست می‌آید. با استفاده از شاخه اصلی رادیکال آن را به نیم‌صفحه سمت چپ، یعنی شکل ۲۴.۳ تبدیل می‌کنیم. تحت دوران $w_۴ = e^{i\frac{\pi}{۲}} w_۳$ نیم‌صفحه بالایی به‌دست می‌آید. حال نگاشت $w = \frac{w_۴ - i}{w_۴ + i}$ دیسک واحد ۲۰.۳ را نتیجه می‌دهد. پس جواب



شکل ۲۲.۳

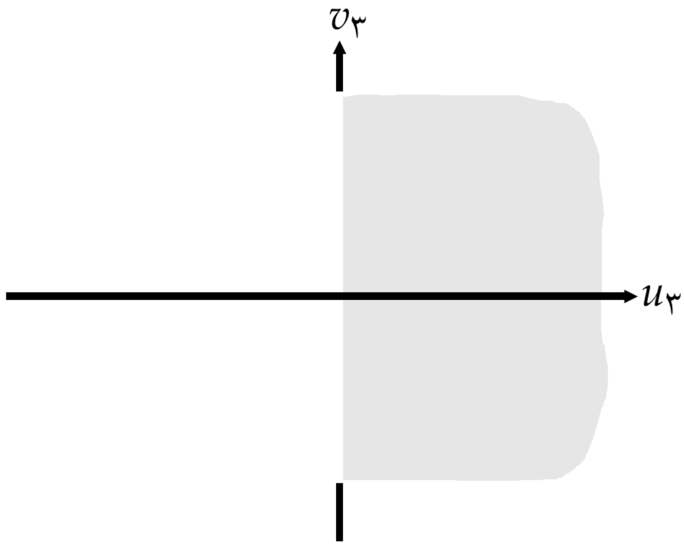


شکل ۲۳.۳

نگاشت زیر است.

$$w=\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}-i}{e^{i\frac{3\pi}{4}}\sqrt{\frac{z-1}{z+1}}+i}.$$

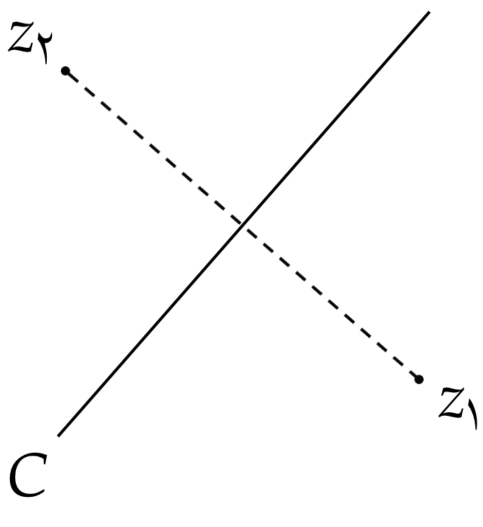
تذکر. در فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای دیدیم که مسائل معادله پوآسن روی میدان بین دو دایره هم‌مرکز با استفاده از صورت قطبی قابل حل است. لیکن اگر این میدان یک میدان بین دو دایره غیر



شکل ۲۴.۳

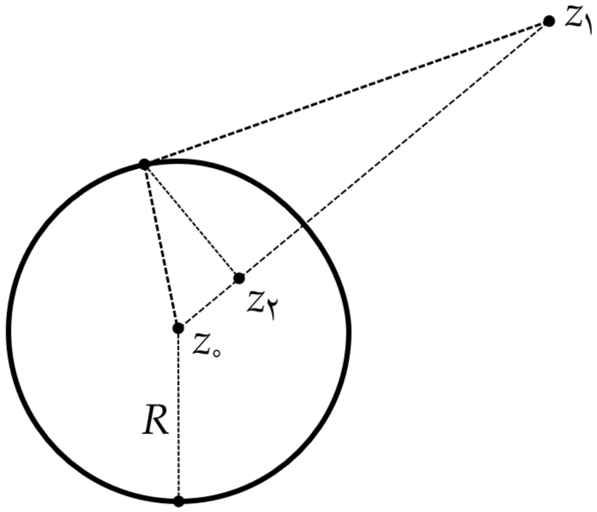
هم‌مرکز غیرمتقاطع یا میدان بین یک خط و یک دایره غیرمتقاطع باشد، دیگر با روش‌های فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای قابل حل نیست. حل اینگونه مسائل با استفاده از مطالب زیر میسر می‌گردد. در ابتدا به بیان مفهوم دو نقطه معکوس نسبت به خط و دایره می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳. دو نقطه z_1 و z_2 را که نسبت به خط C قرینه یکدیگر هستند، معکوس یکدیگر نسبت به خط C می‌گویند. شکل ۲۵.۳ را ببینید.



شکل ۲۵.۳

تعریف ۲.۳. دو نقطه z_1 و z_2 را نسبت به دایره $C\ :\ |z-z_0|=R$ معکوس می‌گوییم اگر هر دو نقطه در امتداد یک شعاع این دایره باشند، بعلاوه $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$. شکل ۲۶.۳ را ببینید.



شکل ۲۶.۳

تذکر. چنانچه z_2 به z_0 نزدیک شود، z_1 به ∞ نزدیک می‌شود. به این دلیل ∞ را معکوس z_0، یعنی مرکز دایره، می‌شناسیم.

در ارتباط با نگاشت مبیوس و نقاط معکوس خاصیت زیر را داریم:

خاصیت ۷.۳. اگر دایره (یا خط) C تحت نگاشت مبیوس $w = T(z)$ به دایره (یا خط) C' نگاشته شود و z_1 و z_2 معکوس یکدیگر نسبت به C باشند، آنگاه $T(z_1)$ و $T(z_2)$ معکوس یکدیگر نسبت به C' هستند.

علت. برای دیدن علت خاصیت به [۱] مراجعه کنید.

مثال ۱۴.۳. میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ را به‌صورت $1 - 1$ و پوشا و همدیس به میدان بین دو دایره هم‌مرکز $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.

حل. برای حل اینگونه مسائل از دو نکته اساسی زیر و خاصیت فوق استفاده می‌کنیم.

تذکر. دو نقطه یگانه مانند z_1 و z_2 موجود است که نسبت به هر دو دایره معکوس یکدیگر باشند.

تذکر. مرکز دایره و ∞ معکوس یکدیگراند.

حل. ابتدا دو نقطه z_1 و z_2 را به‌دست می‌آوریم تا نسبت به هر دو دایره معکوس یکدیگر باشند. مرکز هر دو دایره روی محور اعداد حقیقی است. پس z_1 و z_2 نیز اعداد حقیقی و مثبت هستند. این نقاط را x_1 و x_2 بگیرید.

برای معکوس بودن نسبت به $|z| = ۱$ باید داشته‌باشیم:

$$x_۱x_۲ = ۴$$

برای معکوس بودن نسبت به $|z - ۳| = ۱$ باید داشته‌باشیم:

$$(۵ - x_۱)(۵ - x_۲) = ۴$$

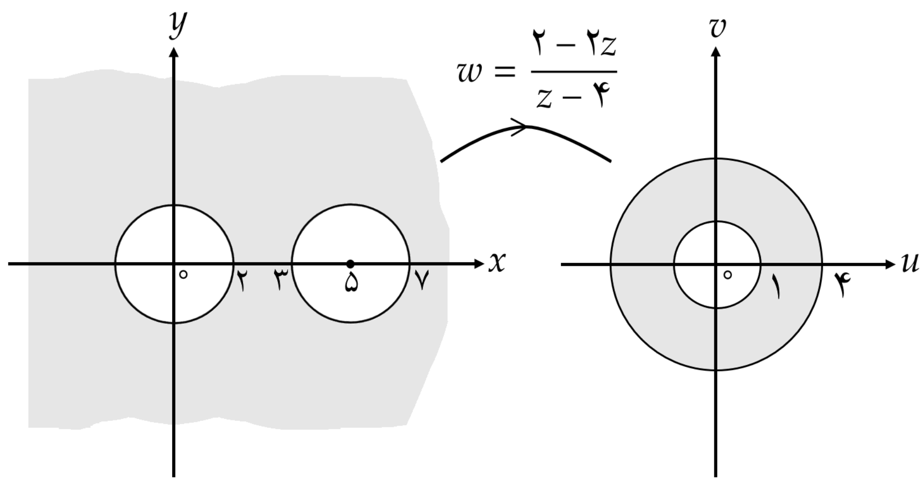
پس $x_۱x_۲ = ۴$ و $x_۱ + x_۲ = ۵$. یعنی $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله $x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$ هستند. درنتیجه $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۴$. حال اگر نگاشت مبیوسی را بنویسیم که ۱ را به ۰ و ۴ را به ∞ ببرد، تصویر دو دایره مذکور دو دایره به مرکز مبدأ می‌شود. برای برقراری شعاع دایره کوچک‌تر برابر با ۱ می‌توانیم ۲ را هم بر ۱ تصویر کنیم. بنابراین تبدیل مطلوب نگاشت مبیوسی است که

$$۱ \to ۰, \quad ۲ \to ۱, \quad ۴ \to \infty$$

پس

$$\frac{w - ۰}{۱ - ۰} = \frac{z - ۱}{z - ۴} \cdot \frac{۲ - ۴}{۲ - ۱} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{۲ - ۲z}{z - ۴}.$$

توجه کنید تصویر نقطه ۳ نقطه ۴ است. پس میدان تصویر، طوقه بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z| = ۴$ است. به شکل ۲۷.۳ توجه کنید.



شکل ۲۷.۳

تمرین ۲.۳

۱. تصویر هر یک از میدان‌های زیر را تحت نگاشت خطی $w = (۱ - \sqrt{۳}i)z + ۳ - ۲i$ با روش هندسی بیابید.

آ) $\{0 < r < 1, \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{4}\}$.

ب) $\{x > 0, y > 0, x + y < 0\}$.

ج) $\{1 < x^2 + y^2 < 2, y > 0\}$.

د) $\{x < 0, 0 < y < \pi\}$.

۲. تصویر میدان $\{x > 0, 2 < y < 1 + x\}$ را با هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

آ) $w = \frac{1}{z}$.

ب) $w = (1 + i)z + 2 + 2i$.

ج) $w = \frac{z-1}{z+1}$.

د) $w = (z - 2i)^3 + 2 - i$.

۳. نقاط ثابت نگاشت‌های زیر را بیابید.

آ) $w = \frac{2z-i}{z+2i}$.

ب) $w = (z - i)^2 + 1 - i$.

ج) $w = z^3$.

د) $w = (z + i)^3 - i$.

۴. تمام نگاش‌های مبیوسی را بیابید که

آ) فاقد نقطه ثابت‌اند.

ب) یک نقطه ثابت دارند.

ج) دو نقطه ثابت دارند.

د) دو نقطه ثابت متمایز دارند.

۵. با روش هندسی تصویر میدان $|z - 1| < 1$ را تحت هر یک از نگاشت‌های زیر بیابید.

آ) $w = (1 - i)z + 2 - i$.

ب) $w = \frac{1}{z}$.

ج) $w = \frac{z-2}{z}$.

د) $w = \frac{z-i}{z+1}$.

۶. نگاشت مبیوسی را بیابید که نقاط داده شده را بر نقاط داده شده بنگارد.

آ) ۰، ۱ و i را بر ∞، ۱ و ۰.

ب) i، ۰ و ۱ را بر $-i$، ۰ و $1 + i$.

ج) i، ∞ و $-i$ را بر ۰، i و ۲.

د) i، $-i$ و ۳ را بر ۰، ۱ و ۲.

۷. نگاشت مبیوسی را بیابید که $|z| < 1$ را بر $|w| < 1$ و نقطه $\frac{1}{2}$ را به ۰ و نقطه ۱ را بر i بنگارد.

۸. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, 1 < y < x\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دایره واحد بنگارید.

۹. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x < 1, \frac{\pi}{3} < y < \frac{\pi}{2}\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

۱۰. تصویر $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, xy < \frac{\pi}{2}\}$ را تحت نگاشت $w = e^{z^2}$ بیابید.

۱۱. میدان $\{z \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0, r < 1\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالائی بنگارید.

۱۲. میدان $\{z : y > 0\} \setminus \{x = 0, 0 < y < 1\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

۱۳. میدان بین دو دایره $|z - 1| = 1$ و $|z| = 1$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالائی بنگارید.

۱۴. میدان $\{z \in \mathbb{C} : y > 0, r < 1\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر ربع اوّل بنگارید.

۱۵. میدان $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, y > -1\}$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

۱۶. میدان بین دایره $|z| = 3$ و خط $x + y = 5\sqrt{2}$ را به‌صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.

۱۷. میدان بین دو دایره $|z| = 2$ و $|z - 5| = 2$ را به‌صورت $1 - 1$ و پوشا بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارید.

۱۸. نگاشت مبیوسی را بیابید که میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ را بر میدان بین دو دایره $|z| = 1$ و $|z| = R > 1$ بنگارد.

۳.۳ کاربرد نگاشت‌های همدیس در حل معادلات پاره‌ای

صورت معادله موج و حرارت دو بعدی عبارتند از:

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x,y,t)$$
$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x,y,t).$$

در حالت ماندگار یعنی وقتی‌که تغییر زمان اثری در مقدار u ندارد این معادلات به‌صورت زیر ساده می‌گردند.

$$c^2(u_{xx} + u_{yy}) + g_1(x,y) = 0.$$

این معادله را معادله پوآسن و در حالتی‌که $g_1(x,y) = 0$ باشد آن را معادله لاپلاس گویند.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

قبلاً هر جواب این معادله را یک تابع همساز نامیدیم. همچنین ارتباطی بین این معادله و تابع تحلیلی به‌صورت زیر داشتیم.

۱. قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز یا جواب معادله لاپلاس است.

۲. ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است.

در این بخش به‌دنبال این هستیم که با استفاده از این دو خاصیت، مسئله معادله لاپلاس را همراه با شرایط مرزی روی میدان‌های «بد» حل کنیم. همچنین مسائلی از معادله لاپلاس با شرایط مرزی روی میدان‌های «خوب» ممکن است با روش‌های قبلی حل نشود ولی با روش‌های این بخش قابل حل باشد.

نظر به‌این‌که از حرف u برای قسمت حقیقی تابع تحلیلی استفاده می‌کنیم از این به بعد جواب معادله لاپلاس را با T نشان می‌دهیم.

مثال ۱۵.۳. معادله لاپلاس همراه با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \qquad y > 0, \ -\infty < x < +\infty$$
$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_0 & x > 0 \end{cases}$$

حل. می‌دانیم قسمت حقیقی یا موهومی هر تابع تحلیلی یک جواب معادله فوق است. تابع $\operatorname{Log} z$ را به‌صورت زیر داریم.

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, \qquad r > 0, \ -\pi < \theta < \pi.$$

پس θ یک جواب معادله فوق است. در نتیجه با توجه به خاصیت خطی این معادله $T(x,y) = A + B\theta$ نیز یک جواب این معادله است. پس کافیست اعداد A و B را طوری انتخاب کنیم تا شرایط مرزی برقرار شود.

$$T(x,y) = A = T_0 \qquad \theta = 0$$
$$T(x,y) = A + B\pi = T_1 \qquad \theta = \pi.$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.

$$T(x,y) = \frac{T_۱ - T_۰}{\pi}\theta + T_۰$$

یا

$$T(x,y) = \frac{T_۱ - T_۰}{\pi}\tan^{-۱}\frac{y}{x} + T_۰ \qquad y > ۰,\ -\infty < x < +\infty$$

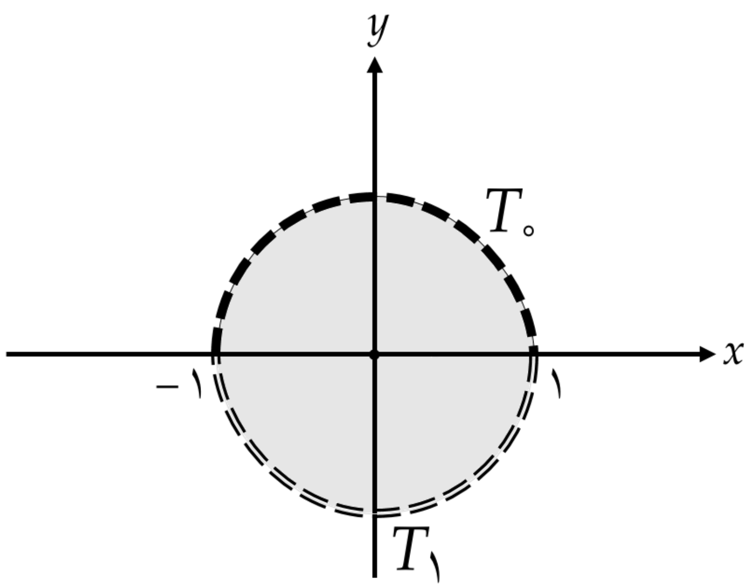
که در آن $\tan^{-۱} t$ به شاخه‌ای اشاره دارد که $۰ \leq \tan^{-۱} t \leq \pi$ باشد.

تذکر. با روش‌های فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای حل این مسئله آسان نیست. مضافاً به‌این‌که این جواب یک جواب فیزیکی است. یعنی کرانه‌دار است.

مثال ۳.۱۶. مطلوبست حل مسئله زیر

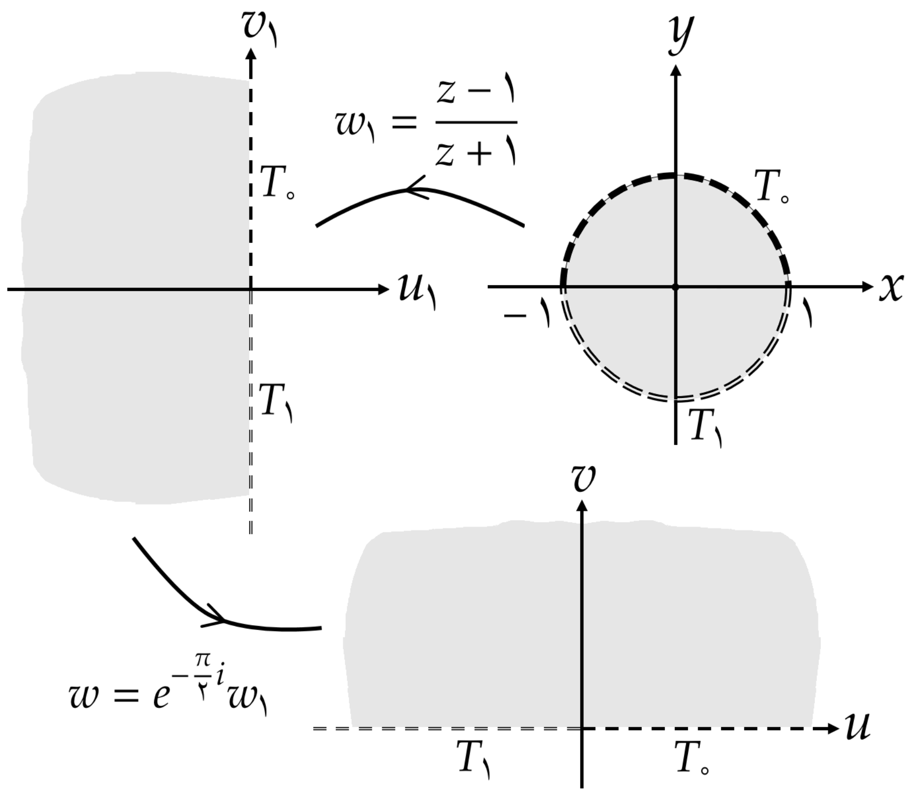
$$T_{xx} + T_{yy} = ۰, \qquad x^۲ + y^۲ \leq ۱$$
$$T(x,y) = \begin{cases} T_۱ & x^۲ + y^۲ = ۱,\ y < ۰ \\ T_۰ & x^۲ + y^۲ = ۱,\ y > ۰ \end{cases}$$

حل. این مسئله را روی میدان دیسک واحد داریم. شرایط مرزی در شکل ۳.۲۸ روی مرز دیسک مشخص شده است.



شکل ۳.۲۸

برای حل این مسئله از خاصیت دوم فوق و حل مثال ۳.۱۵ استفاده می‌کنیم. برای این کار میدان فوق را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالائی می‌نگاریم. (به شکل ۳.۲۹ توجه کنید.) پس



شکل ۲۹.۳

نگاشت

$$w = -i\frac{z-۱}{z+۱}$$

دیسک واحد را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا بر نیم‌صفحه بالائی می‌نگارد. لبه بالائی دایره واحد بر محور حقیقی و $u > ۰$ و لبه پایینی بر قسمت منفی محور حقیقی یعنی $u < ۰$ تصویر می‌شود. با توجه به مثال ۱۵.۳ جواب مسئله

$$T_{uu} + T_{vv} = ۰$$

$$T(u,۰) = \begin{cases} T_۰ & u > ۰ \\ T_۱ & u < ۰ \end{cases}$$

را به‌صورت زیر داریم:

$$T(u,v) = \frac{T_۱ - T_۰}{\pi}\tan^{-۱}\frac{v}{u} + T_۰.$$

همچنین طبق خاصیت دوم فوق

$$T(u(x,y), v(x,y)) = H(x,y)$$

جواب مسئله زیر است که در آن $u(x,y)$ و $v(x,y)$ قسمت حقیقی و موهومی نگاشت $w = -i\frac{z-۱}{z+۱}$

می‌باشد.

$$H_{xx}+H_{yy}=(u_x^۲+v_x^۲)(T_{uu}+T_{vv})=۰$$

$$H(x,y)=\begin{cases}T_۱ & x^۲+y^۲=۱,\ y<۰\\ T_۰ & x^۲+y^۲=۱,\ y>۰\end{cases}$$

به‌این‌ترتیب جواب مسئله فوق به‌دست می‌آید.

حال به محاسبه $u(x,y)$ و $v(x,y)$ می‌پردازیم.

$$w=\frac{i-iz}{۱+z}=i\frac{[(۱-x)-iy]\cdot[(۱+x)-iy]}{(۱+x)^۲+y^۲}$$

$$w=\frac{۲y}{(۱+x)^۲+y^۲}+i\frac{۱-x^۲-y^۲}{(۱+x)^۲+y^۲}=u+iv.$$

به‌این‌ترتیب جواب نهایی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$T(x,y)=\frac{T_۱-T_۰}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱-x^۲-y^۲}{۲y}+T_۰.$$

تذکر. مسئله فوق با استفاده از سری فوریه و در مختصات قطبی قابل حل است لیکن جواب به این شفافی نخواهد بود.

مثال ۱۷.۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$T_{xx}+T_{yy}=۰,\qquad y>۰,\ -\infty<x<+\infty$$
$$T(x,۰)=\frac{x}{۱+x^۲}$$

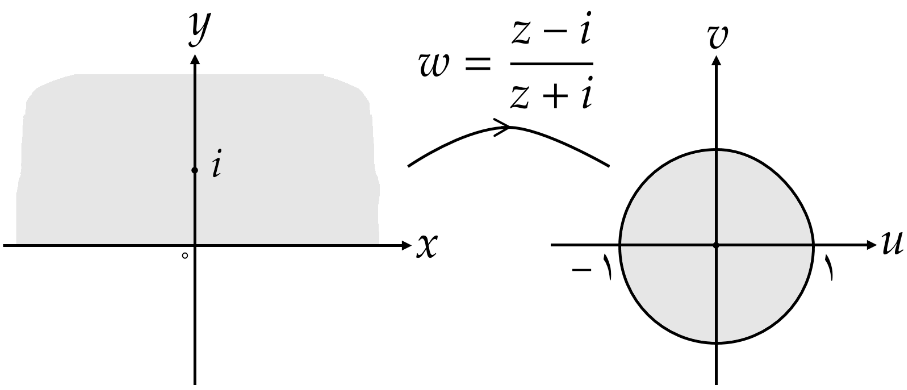
حل. این مسئله را به‌کمک نگاشت $w=\frac{z-i}{z+i}$ از نیم‌صفحه به دیسک واحد منتقل می‌کنیم. (به شکل ۳۰.۳ توجه کنید.)

در این‌صورت

$$u(x,y)=\frac{x^۲+y^۲-۱}{x^۲+(y+۱)^۲}\quad,\quad v(x,y)=\frac{-۲x}{x^۲+(y+۱)^۲}.$$

با این تغییر متغیرها مسئله فوق به مسئله زیر تبدیل می‌گردد.

$$(u_x^۲+v_x^۲)(T_{uu}+T_{vv})=۰$$



شکل ۳۰.۳

یا

$$T_{uu} + T_{vv} = \circ.$$

برای تبدیل شرایط مرزی از صفحه z به صفحه w لازم است که x را بر حسب u و v محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
w = \frac{z-i}{z+i} \quad &\Longrightarrow \quad wz + iw = z - i \quad \Longrightarrow \quad z = i\frac{۱+w}{۱-w} \\
\Longrightarrow \; x + iy &= i\frac{۱+u+iv}{۱-u-iv} = \frac{(۱+u+iv)(۱-u+iv)}{(۱-u)^۲+v^۲} \\
&= i\frac{۱-u^۲-v^۲+۲iv}{(۱-u)^۲+v^۲}. \\
\Longrightarrow \; x &= \frac{-۲v}{(۱-u)^۲+v^۲} = \frac{-۲v}{۱-۲u+u^۲+v^۲} = \frac{-v}{۱-u}. \\
\Longrightarrow \; \frac{x}{۱+x^۲} &= \frac{\frac{-v}{۱-u}}{۱+\frac{v^۲}{(۱-u)^۲}} = \frac{\frac{v}{u-۱}}{\frac{۲(۱-u)}{(۱-u)^۲}} = -\frac{v}{۲}.
\end{aligned}$$

پس مسئله در صفحه u و v به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}
&T_{uu} + T_{vv} = \circ, \qquad u^۲ + v^۲ \le ۱, \\
&T\Big|_{u^۲+v^۲=۱} = -\frac{v}{۲}.
\end{aligned}$$

در مختصات قطبی اگر بگیریم $w = \rho e^{i\phi}$، مسئله را به‌صورت زیر داریم.

$$T_{\rho\rho} + \frac{۱}{\rho}T_\rho + \frac{۱}{\rho^۲}T_{\phi\phi} = \circ, \qquad \rho < ۱, \; -\pi \le \phi \le \pi$$

یا

$$\begin{aligned}&\rho^2 T_{\rho\rho}+\rho T_\rho+T_{\phi\phi}=0, \qquad \rho<1,\ -\pi\le\phi\le\pi\\ &T\Big|_{\rho=1}=-\frac{1}{2}\sin\phi.\end{aligned}$$

پایه مناسب حل نمائی است یعنی $\{e^{in\phi}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. از قرار دادن

$$T(\rho,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R(\rho)e^{in\phi}$$

در مسئله داریم.

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-n^2R(\rho)=0.$$

که جواب عمومی آن به‌صورت زیر است.

$$R(\rho)=A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}.$$

در نتیجه

$$T(\rho,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}\right)e^{in\phi}.$$

چون در $\rho=0$ جواب کرانه‌دار است پس $A_n=0$ برای $n<0$ و $B_n=0$ برای $n>0$. در نتیجه

$$\begin{aligned}T(\rho,\phi)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\rho^ne^{in\phi}+\sum_{n=-\infty}^{-1}B_n\rho^{-n}e^{in\phi}\\ T(1,\phi)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{in\phi}+\sum_{n=-\infty}^{1}B_ne^{in\phi}=-\frac{1}{2}\sin\phi=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}\right).\end{aligned}$$

پس $A_1=-\frac{1}{4i}$ و $B_{-1}=\frac{1}{4i}$ و سایر A_nها و B_nها برابر صفراند. به‌این‌ترتیب

$$T(\rho,\phi)=\left(-\frac{1}{4i}e^{i\phi}+\frac{1}{4i}e^{-i\phi}\right)\rho=-\frac{1}{2}\rho\sin\phi.$$

یا

$$T(\rho,\phi)=-\frac{1}{2}v.$$

پس جواب مسئله در صفحه x و y می‌شود.

$$T(x,y)=\frac{x}{x^2+(y+1)^2}.$$

حل مسائل غیرهمگن هم با استفاده از ابزار نگاشت همدیس مقدور است. به مثال زیر توجه کنید.

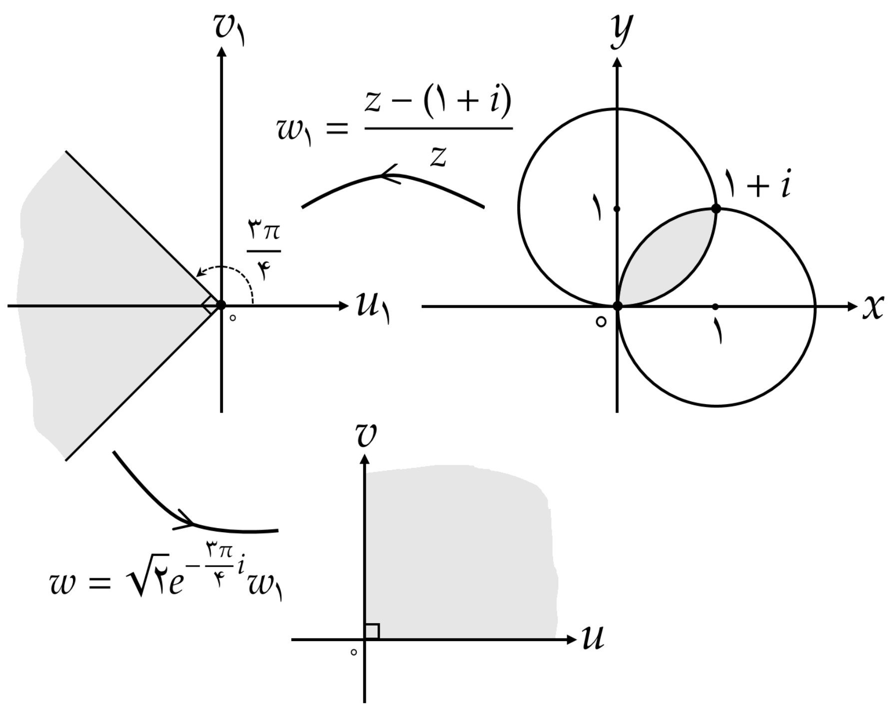
مثال ۱۸.۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} & T_{xx}+T_{yy}=xy, \qquad (x,y)\in D,\\ & D=\{z : |z-i|<۱, |z-۱|<۱\},\\ & T\Big|_{\partial D}=\frac{x+y}{x^{۲}+y^{۲}}. \end{aligned}$$

حل. ابتدا با نگاشت مبیوس

$$w=f(z)=\sqrt{۲}e^{-\frac{۳\pi}{۴}i}\cdot\frac{z-(۱+i)}{z}$$

میدان D را به ربع اوّل تبدیل می‌کنیم. (به شکل ۳۱.۳ توجه کنید.) در این‌صورت تغییر متغیرهای مستقل



شکل ۳۱.۳

را به‌صورت زیر داریم.

$$u(x,y)=\frac{۲x-x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad v(x,y)=\frac{x^{۲}+y^{۲}+۲y}{x^{۲}+y^{۲}}.$$

مسئله فوق به‌صورت زیر در می‌آید.

$$T_{xx}+T_{yy}=|f'(z)|^{۲}(T_{uu}+T_{vv})=\frac{x+y}{x^{۲}+y^{۲}},\qquad (u,v)\in D'=f(D),$$

$$T\Big|_{\partial D'}=xy\Big|_{x=x(u,v)\,,\,y=y(u,v)}.$$

بعد از ساده کردن می‌شود:

$$T_{uu}+T_{vv}=xy=-\frac{۲(u+v)}{(u-۱)^{۲}+(v+۱)^{۲}},\qquad u>۰,\ v>۰,$$

$$T\Big|_{\partial D'}=\frac{۴(u-۱)(v+۱)}{(u-۱)^{۲}+(v+۱)^{۲}}=\begin{cases}\dfrac{-۴(v+۱)}{(v+۱)^{۲}+۱} & u=۰\\ \dfrac{۴(u+۱)}{(u-۱)^{۲}+۱} & v=۰\end{cases}$$

در حقیقت از مقادیر زیر استفاده شده است.

$$|f'(z)|^{۲}=\frac{۴}{x^{۲}+y^{۲}}\ ,\ x=\frac{۲(۱-u)}{(u-۱)^{۲}+(v-۱)^{۲}}\ ,\ y=\frac{۲(۱-v)}{(u-۱)^{۲}+(v-۱)^{۲}}.$$

این مسئله با تبدیل فوریه سینوسی قابل حل است. ابتدا نسبت به متغیر u تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم. تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(u)$ را با $\mathscr{F}_{su}(g)$ یا برای سادگی با $\hat{g}$ نمایش می‌دهیم و تابعی از ω درنظر می‌گیریم.

$$-\omega^{۲}\hat{T}+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega\cdot\frac{-۴(v+۱)}{(v+۱)^{۲}+۱}+\hat{T}_{vv}=-۲\mathscr{F}_{su}\left(\frac{u+v}{(u-۱)^{۲}+(v+۱)^{۲}}\right)$$

$$\hat{T}\Big|_{v=۰}=\mathscr{F}_{su}\left(\frac{۴(u-۱)}{(u-۱)^{۲}+۱}\right).$$

حال نسبت به v تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم. تبدیل فوریه سینوسی تابع $g(v)$ را نیز با $\mathscr{F}_{sv}(g)$ یا برای سادگی با $\hat{g}$ نمایش می‌دهیم و تابعی از α در نظر می‌گیریم.

$$(\alpha^{۲}-\omega^{۲})\hat{\hat{T}}+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\alpha\cdot\mathscr{F}_{su}\left(\frac{۴(u-۱)}{(u-۱)^{۲}+۱}\right)-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega\cdot\mathscr{F}_{sv}\left(\frac{-۴(v+۱)}{(v+۱)^{۲}+۱}\right)$$
$$=-۲\mathscr{F}_{sv}\left(\mathscr{F}_{su}\left(\frac{u+v}{(u-۱)^{۲}+(v+۱)^{۲}}\right)\right).$$

بعد از محاسبه این تبدیلات به‌دست می‌آوریم.

$$(-\omega^{۲}-\alpha^{۲})\hat{\hat{T}}=g(\omega,\alpha).$$

پس

$$T(u,v)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{g(\omega,\alpha)}{-\omega^{۲}-\alpha^{۲}}\sin\omega u\sin\alpha v\,d\omega d\alpha$$

در نتیجه

$$T(x,y)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}\frac{g(\omega,\alpha)}{-\omega^{۲}-\alpha^{۲}} \cdot\sin\left(\omega\frac{۲x-x^{۲}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}\right)\sin\left(\alpha\frac{x^{۲}+y^{۲}+۲y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)d\omega d\alpha.$$

با توجه به مثال ۱۵.۳ و خاصیت خطی معادله لاپلاس خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۸.۳. جواب مسئله

$$T_{uu}+T_{vv}=۰,\qquad -\infty<u<+\infty,\ v>۰,$$

$$T\Big|_{v=۰}=\begin{cases}T_i & a_{i+۱}<u<a_i\quad i=۰,۱,۲,\cdots,n-۱\\ T_۰ & u>a_۰\\ T_{n+۱} & u<a_n.\end{cases}$$

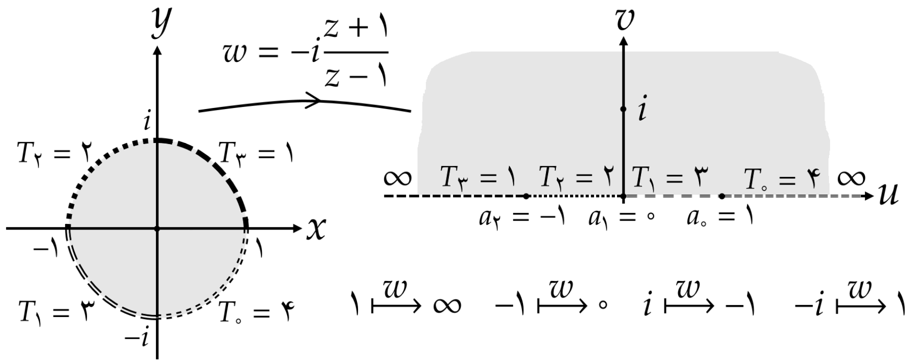
را به‌صورت زیر داریم.

$$T(u,v)=T_۰+\sum_{i=۰}^{n}\frac{T_{i+۱}-T_i}{\pi}\tan^{-۱}\frac{v}{u-a_i}.$$

مثال ۱۹.۳. معادله لاپلاس را برای دیسک واحد با شرایط مرزی داده شده حل کنید.

$$T_{xx}+T_{yy}=۰,\qquad -\infty<x<+\infty,\ y>۰,$$

$$T\Big|_{x^{۲}+y^{۲}=۱}=\begin{cases}۱ & x>۰,\ y>۰,\\ ۲ & x<۰,\ y>۰,\\ ۳ & x<۰,\ y<۰,\\ ۴ & x>۰,\ y<۰.\end{cases}$$



شکل ۳.۳۲

حل. دیسک واحد را با نگاشت $w = -i\frac{z+1}{z-1}$ به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالائی می‌نگاریم. (به شکل ۳.۳۲ توجه کنید.)

پس اگر بگیریم $a_0 = 1$، $a_1 = 0$، $a_2 = -1$، $T_0 = 4$، $T_1 = 3$، $T_2 = 2$ و $T_3 = 1$ طبق خاصیت ۳.۸ به‌دست می‌آوریم.

$$T(u,v) = 4 - \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{v}{u-1} + \tan^{-1}\frac{v}{u} + \tan^{-1}\frac{v}{u+1}\right).$$

حال کافیست از

$$w = -i\frac{z+1}{z-1} = u(x,y) + iv(x,y)$$

$u(x,y)$ و $v(x,y)$ را بیابیم و در فرمول $T(u,v)$ فوق قرار دهیم تا جواب مسئله معادله لاپلاس برای دیسک واحد با شرایط مرزی داده شده حاصل شود.

تذکر. در مثال ۳.۱۵ جواب مسئله

$$T_{xx} + T_{yy} = 0, \qquad y > 0, \; -\infty < x < +\infty$$

$$T(x,0) = \begin{cases} T_1 & x < 0 \\ T_0 & x > 0 \end{cases}$$

با استفاده از $T(x,y) = A + B\theta$ به‌صورت زیر به‌دست آمد.

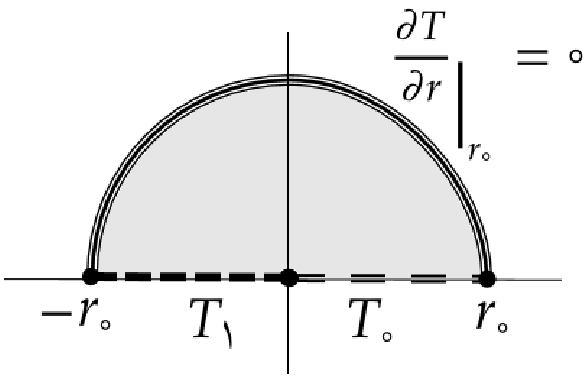
$$T(x,y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

چون این جواب در مختصات قطبی فاقد r است پس روی هر نقطه از نیم‌دایره $x^2 + y^2 = r_0^2$، $y > 0$ داریم $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$. به‌این‌ترتیب این جواب معادله لاپلاس جواب مسئله زیر روی نیم‌دیسک $x^2 + y^2 < r_0^2$

و $y > \circ$ نیز است. (به شکل ۳۳.۳ توجه کنید.)

$$T_{xx} + T_{yy} = \circ, \qquad x^{۲} + y^{۲} < r_\circ^{۲},\ y > \circ$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r_\circ} = \circ, \quad T(x,\circ) = \begin{cases} T_{۱} & x < \circ \\ T_\circ & x > \circ. \end{cases}$$



شکل ۳۳.۳

تذکر. روش‌های این بخش برای معادلات حرارت یا موج مفید نیست. چون حضور ضریب $|f'(z)|^{۲}$ در جمله لاپلاسین معادله را در صفحه u و v با ضریب متغیر می‌کند که با روش‌های این کتاب قابل حل نیست لیکن با روش‌های عددی قابل حل است.

مثال ۲۰.۳. میدان D را میدان بین دو دایره $|z| = ۲$ و $|z - ۵| = ۲$ در نظر بگیرید. مطبوبست حل مسئله زیر روی D:

$$T_{xx} + T_{yy} = ۳۶\Big[(x-۴)^{۲} + y^{۲}\Big]^{-۱}, \qquad u\big|_{\partial D} = \circ$$

حل. در مثال ۱۴.۳ بخش قبلی مشاهده کردیم که تحت نگاشت $w = \frac{۲-۲z}{z-۴}$ میدان فوق به میدان D' بین دو دایره $|w| = ۱$ و $|w| = ۴$ نگاشته می‌شود. همچنین مسئله فوق به مسئله زیر روی این میدان تبدیل می‌گردد:

$$|w'|^{۲}(T_{uu} + T_{vv}) = ۳۶\Big[(x-۴)^{۲} + y^{۲}\Big]^{-۱},\ \ T\big|_{\partial D'} = \circ.$$

لیکن

$$w' = \frac{۶}{(z-۴)^{۲}} \quad \Rightarrow \quad |w'|^{۲} = \frac{۳۶}{(x-۴)^{۲} + y^{۲}}.$$

پس مسئله در صفحه w تبدیل به مسئله زیر می‌شود:

$$T_{uu}+T_{vv}=1,$$
$$T\Big|_{D'}=0.$$

با درنظرگرفتن مسئله در مختصات قطبی به‌طوری‌که $w=Re^{i\phi}$، خواهیم داشت

$$T_{RR}+\frac{1}{R}T_R+\frac{1}{R^2}T_{\phi\phi}=1,\quad 1<R<4,\ -\pi\le\phi\le\pi,$$
$$iT(R,-\pi)=T(R,\pi),\quad T_\phi(R,-\pi)=T_\phi(R,\pi)$$
$$T(\phi,1)=0,\quad T(\phi,4)=0.$$

پایه مناسب برحسب ϕ پایه نمایی (مختلط) با $p=\pi$ است، یعنی

$$\left\{e^{in\phi}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

پس می‌گیریم

$$T(R,\phi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n(R)e^{in\phi}.$$

درنتیجه باید باید داشته‌باشیم

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[R^2P_n''(R)+RP_n'-n^2P_n(R)\right]e^{in\phi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R^2c_ne^{in\phi},$$

که در آن $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\phi}\,d\phi$. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$c_0=1,\quad c_n=0,\quad n\neq 0.$$

جواب عمومی معادله

$$R^2P_n''(R)+RP_n'(R)-n^2P_n(R)=c_nR^2$$

را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda^2-n^2=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm n$$
$$P_n(R)=A_nR^n+B_nR^{-n}\quad n\neq 0$$
$$P_0(R)=A_0\ln R+B_0+\frac{1}{4}R^2$$

همچنین از شرایط مرزی $T(۱,\phi) = T(۴,\phi) = ۰$ به‌دست می‌آوریم $P_n(۴) = P_n(۱) = ۰$. با اعمال این شرایط بر $P_n(R)$ به‌دست می‌آوریم

$$P_n(۱) = A_n + B_n = ۰$$

$$\Longrightarrow \quad A_n = B_n = ۰, \quad n \neq ۰$$

$$P_n(۴) = A_n ۴^n + B_n ۴^{-n} = ۰$$

$$P_۰(۱) = B_۰ + \frac{۱}{۴} = ۰$$
$$P_۰(۴) = A_۰ \ln ۴ + B_۰ + ۴ = ۰$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$A_۰ = -\frac{۱۵}{۱۶ \ln ۴}, \quad B_۰ = -\frac{۱}{۴}.$$

درنتیجه

$$T(R,\phi) = -\frac{۱۵}{۱۶ \ln ۴} \ln R - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} R^۲.$$

از طرفی از $w = \frac{۲-۲z}{z-۴}$ به‌دست می‌آوریم

$$u + iv = \frac{۲ - ۲(x+iy)}{x+iy-۴} = \frac{\left[(۲-۲x) - ۲iy\right]\left[(x-۴) - iy\right]}{(x-۴)^۲ + y^۲}$$
$$\frac{(۲-۲x)(x-۴) - ۲y^۲}{(x-۴)^۲ + y^۲} + i\,\frac{-y(۲-۲x+۲x-۸)}{(x-۴)^۲+y^۲}$$

پس

$$u = \frac{-۲(x^۲+y^۲) + ۱۰x - ۸}{(x-۴)^۲ + y^۲}, \quad v = \frac{۶y}{(x-۴)^۲ + y^۲}.$$

بنابراین جواب مسئله زیر به‌صورت زیر است:

$$T(x,y) = -\frac{۱۵}{۳۲ \ln ۴} \ln \frac{(-۲(x^۲+y^۲) + ۱۰x - ۸)^۲ + ۳۶y^۲}{((x-۴)^۲ + y^۲)^۲} - \frac{۱}{۴}$$
$$+ \frac{۱}{۴} \frac{(-۲(x^۲+y^۲) + ۱۰x - ۸)^۲ + ۳۶y^۲}{((x-۴)^۲+y^۲)^۲}$$

تمرین ۳.۳

معادلات لاپلاس زیر را با شرایط مرزی روی میدان D داده شده حل کنید.

۱. $D = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > ۰\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x>۵\}} = ۱, \quad T\Big|_{\{y=۰, x<۵\}} = ۲.$$

۲. $D = \{z \in \mathbb{C} : y > ۰\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : x = ۰, ۰ < y < ۲\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x>۰\}} = ۱, \quad T\Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۲, \quad T\Big|_{\{x=۰, ۰<y<۲\}} = ۴.$$

۳. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < y < \pi, x < ۰\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۵, \quad T\Big|_{\{y=\pi, x<۰\}} = ۸, \quad T\Big|_{\{x=۰, ۰<y<\pi\}} = ۴.$$

۴. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱, |z-۱| < ۱\}$،

$$T\Big|_{|z|=۱} = ۲, \quad T\Big|_{|z-۱|=۱} = ۴.$$

در هر یک از مسائل زیر ابتدا نگاشت $w = f(z)$ را طوری بیابید تا به‌طور همدیس آن مسئله را به نیم‌دیسک بالائی واحد بنگارد. سپس با استفاده از جواب مسئله روی این نیم‌دیسک جواب مسئله اولیه را به‌دست آورید.

۵. $D = \{z \in \mathbb{C} : y > ۰, |z| > ۱\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x>۰\}} = ۲, \quad T\Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{|z|=۱} = ۰.$$

۶. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < y < \pi, x < ۰\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x<۰\}} = ۲, \quad T\Big|_{\{۰<y<\pi, x=۰\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\{y=\pi, x<۰\}} = ۰.$$

۷. $D = \{z \in \mathbb{C} : y > ۰\}$،

$$T\Big|_{\{y=۰, x>۱\}} = ۲, \quad T\Big|_{\{y=۰, |x|<۱\}} = ۴, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\{y=۰, x<-۱\}} = ۰.$$

۸. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۱ < y < x, x > ۰\}$،

$$T\Big|_{\{y=x, x>۰\}} = ۱, \quad T\Big|_{\{y=۱, ۰<x<۱\}} = ۲, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\{y=۱, x>۱\}} = ۰.$$

با استفاده از قسمت حقیقی یا موهومی یک تابع تحلیلی مسائل زیر را حل کنید.

۹. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}, ۱ < r < ۲\}$،

$$T\Big|_{r=۱} = ۴, \quad T\Big|_{r=۲} = ۶, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۰} = ۰, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=۰} = ۰.$$

۱۰. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < y < ۱, x > ۰\}$،

$$T\Big|_{y=۰} = ۰, \quad T\Big|_{y=۱} = x, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=۰} = y.$$

۱۱. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < x < ۱, ۰ < y < ۱\}$،

$$T\Big|_{x=۰} = ۵, \quad T\Big|_{x=۱} = ۱۰, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۰} = ۰, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=۱} = ۰.$$

۱۲. $D = \{z \in \mathbb{C} : ۰ < y < \pi, x < ۰\}$،

$$T\Big|_{y=۰} = x^۲, \quad T\Big|_{y=\pi} = x^۲ - \pi^۲, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=۰} = ۰.$$

مسائل پوآسن همراه با شرایط مرزی داده شده را حل کنید.

۱۳.

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{xy}{x^۲ + y^۲}, \qquad x > ۰, \ y > ۰,$$
$$T\Big|_{y=۰} = \frac{x}{x^۲ + y^۲}, \quad T\Big|_{x=۰} = \frac{y}{x^۲ + y^۲}.$$

۱۴.

$$T_{xx}+T_{yy}=xy,$$
$$D=\{z: 1-\tfrac{1}{4}y^2<x<4-\tfrac{1}{16}y^2,\ \tfrac{1}{16}y^2-4<x<\tfrac{1}{4}y^2-1\},$$
$$T\Big|_{\partial D}=xy.$$

۱۵.

$$T_{xx}+T_{yy}=\frac{x+y}{x^2+y^2},$$
$$D=\{z: |z|<1, x>0, y>0\},$$
$$T\Big|_{x=0}=y,\quad T\Big|_{y=0}=x,\quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1}=0.$$

۱۶.

$$T_{xx}+T_{yy}=x+y,$$
$$D=\{z: |z-1|<1, |z-i|<1\},$$
$$T\Big|_{\partial D}=xy.$$

۱۷. میدان D را میدان بین خط $x+y=5\sqrt{2}$ و دایره $|z|=4$ در نظر بگیرید. مسئله پوآسن زیر را روی D حل کنید:

$$T_{xx}+T_{yy}=xy,\qquad (x,y)\in D$$

$$T\Big|_{\partial D}=xy.$$

۱۸. مسئله پوآسن زیر را روی میدان $D=\{z: |z-5|>2, |z|>2\}$ حل کنید:

$$T_{xx}+T_{yy}=xy,$$
$$T\Big|_{\partial D}=x+y.$$

۱۹. مسئله پوآسن زیر را روی میدان $D=\{z: |z|<1, |z-\tfrac{1}{4}|>\tfrac{1}{4}\}$ حل کنید:

$$T_{xx}+T_{yy}=x+y,$$
$$T\Big|_{\partial D}=x^2-y^2.$$

۴.۳ فرمول‌های انتگرال پوآسن

در این بخش به بررسی مطالبی می‌پردازیم که به ما امکان می‌دهد برای معادله پوآسن دو بعدی در میدان‌های معروف با شرایط مرزی گوناگون فرمول‌هایی بر حسب انتگرال‌های معین و ناسره ارایه دهیم. بسیاری از این انتگرال‌ها به‌سهولت قابل محاسبه دقیق یا حل تقریبی هستند.

فرمول انتگرال پوآسن برای دیسک

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: فرض کنید $C_\circ$ منحنی $|z| = r_\circ$ و تابع f درون و روی $C_\circ$ تحلیلی باشد. فرمول انتگرال کشی

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i} \oint_{C_\circ} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

مقدار f در هر نقطه z در داخل $C_\circ$ را بر حسب مقدار f در نقاط s روی $C_\circ$ بیان می‌کند. در این بخش به‌کمک فرمول بالا، فرمول متناظری برای قسمت حقیقی f به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن مسئله دیریکله برای دیسک $|z| \le r_\circ$ را با ارایه یک فرمول انتگرالی صریح حل می‌کنیم. در نهایت چون می‌دانیم طبق قضیه نگاشت ریمان[۱]، درون و مرز میدان‌های بدون حفره با مرز جردن که کل صفحه مختلط نباشند را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا می‌توان توسط یک نگاشت منحصر به فرد همدیس به‌ترتیب به درون و روی $C_\circ$ نگاشت، پس مسئله پوآسن با شرط مرزی دیریکله برای این میدان‌ها تحت نگاشت مذکور به مسئله پوآسن دیریکله بر روی دیسک تبدیل می‌گردد. بنابراین مسئله به‌صورت نظری حل می‌گردد و در صورت داشتن ضابطه نگاشت همدیس فوق نیز جواب مسئله توسط یک انتگرال معین و ناسره داده می‌شود.

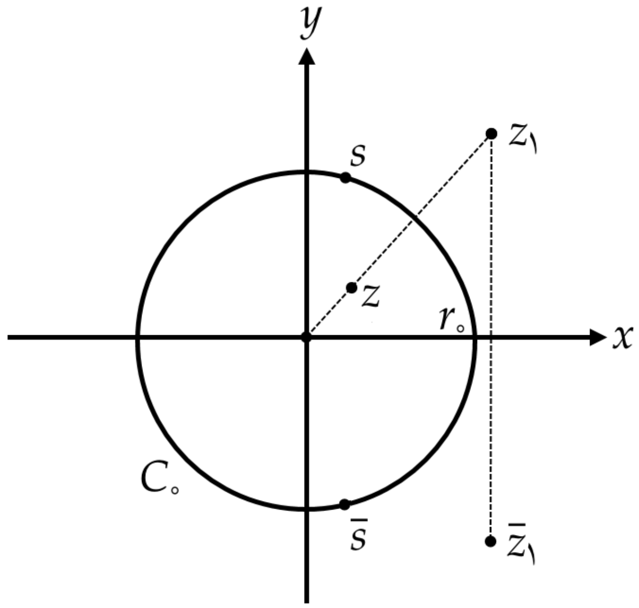
قرار دهید $z = re^{i\theta}$، که در آن $\circ < r < r_\circ$. انعکاس نقطهٔ ناصفر z نسبت به دایره $C_\circ$ عبارت است از نقطهٔ $z_۱$ که با z روی یک پرتو از مبدأ واقع است و در شرط $|z_۱| \cdot |z| = r_\circ^۲$ صدق می‌کند. (به شکل ۳۴.۳ توجه کنید.)

پس اگر $s = r_\circ e^{i\phi}$ نقطه‌ای روی $C_\circ$ باشد:

$$z_۱ = \frac{r_\circ^۲}{r} e^{i\theta} = \frac{r_\circ^۲}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}}.$$

چون $z_۱$ در خارج دایرهٔ $C_\circ$ است، از قضیه کشی–گورسا نتیجه می‌شود که وقتی در انتگرال به‌جای z، $z_۱$

[۱] فصل هفتم مرجع [۱] را ببینید.



شکل ۳۴.۳

قرار دهیم، داریم:

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{C_\circ}\frac{f(z)}{z-z_۱}\,dz=\circ.$$

بنابراین

$$f(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\oint_{C_\circ}\left(\frac{۱}{s-z}-\frac{۱}{s-z_۱}\right)f(s)\,ds=\circ$$

و با استفاده از نمایش پارامتری $s=r_\circ e^{i\phi}$، $\circ\le\phi\le ۲\pi$، برای منحنی $C_\circ$ می توان نوشت:

$$f(z)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\left(\frac{r_\circ e^{i\phi}}{r_\circ e^{i\phi}-z}-\frac{r_\circ e^{i\phi}}{r_\circ e^{i\phi}-z_۱}\right)f(r_\circ e^{i\phi})\,d\phi.$$

حال چون دیدیم که $z_۱=\frac{s\bar{s}}{\bar{z}}$، پس ضریب داخل پارانتز در انتگرال را می‌شود به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{s}{s-z}-\frac{s}{s-z_۱}=\frac{s}{s-z}-\frac{۱}{۱-\frac{z_۱}{s}}=\frac{s}{s-z}-\frac{۱}{۱-\frac{\bar{s}}{\bar{z}}}=\frac{s}{s-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}}=\frac{r_\circ^۲-r^۲}{|s-z|^۲}.$$

پس صورت دیگری از فرمول انتگرال کشی به‌صورت زیر در می‌آید:

$$f(re^{i\theta})=\frac{r_\circ^۲-r^۲}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{f(r_\circ e^{i\phi})}{|s-z|^۲}\,d\phi,\qquad r<r_\circ.$$

عبارت $|s-z|$ فاصله بین نقاط s و z است و می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$|s-z|^۲=r_\circ^۲-۲r_\circ r\cos(\phi-\theta)+r^۲.$$

پس اگر u قسمت حقیقی تابع f باشد طبق صورت جدید فرمول انتگرال کشی نتیجه می‌شود که

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)u(r_0,\phi)}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}\,d\phi,\qquad r<r_0.$$

فرمول بالا یک عملگر خطی انتگرالی از $u(r_0,\theta)$ به $u(r,\theta)$ تعریف می‌کند. هسته تبدیل به‌جز ضریب $\frac{1}{2\pi}$ عبارت است از تابع حقیقی مقدار

$$P(r_0,r,\phi-\theta)=\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}$$

که به هستهٔ پوآسن مشهور است. چون $r<r_0$، پس به‌وضوح P تابعی مثبت است. به‌علاوه چون $\Re\left(\frac{\bar z}{\bar s-\bar z}\right)=\Re\left(\frac{z}{s-z}\right)$، از

$$\frac{s}{s-z}+\frac{\bar z}{\bar s-\bar z}=\frac{r_0^2-r^2}{|s-z|^2}$$

در می‌یابیم که

$$P(r_0,r,\phi-\theta)=\Re\left(\frac{s}{s-z}+\frac{z}{s-z}\right)=\Re\left(\frac{s+z}{s-z}\right).$$

بنابراین برای هر s مشخص بر روی دایره C_0، تابع $P(r_0,r,\phi-\theta)$ داخل C_0 تابعی همساز از (r,θ) است. به‌علاوه $P(r_0,r,\phi-\theta)$ یک تابع متناوب زوج از $\phi-\theta$ با دوره تناوب 2π است و وقتی $r=0$ مقدارش ۱ است.

حال می‌توان فرمول انتگرال پوآسن را چنین نوشت:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)u(r_0,\theta)\,d\phi,\qquad r<r_0 \tag{۱.۳}$$

که در آن فرض کرده‌ایم $u=\Re f$ و f درون و روی C_0 تحلیلی است. بنابراین u در یک مجموعه باز شامل دیسک واحد همساز است. به‌خصوص u درون و روی C_0 پیوسته است. در ادامه خواهیم دید که (۱.۳) تحت شرایط ضعیف‌تری نیز برقرار است.

تعریف ۳.۳. فرض کنید g تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته از θ روی بازه $[0,2\pi]$ باشد. تبدیل انتگرال پوآسن g که با U نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)g(\phi)\,d\phi,\qquad r<r_0. \tag{۲.۳}$$

خاصیت ۹.۳. فرض کنید D دیسک $|z| \le r_\circ$، g مثل فوق و $U = U(r, \theta)$ تبدیل پوآسن g، یعنی (۲.۳) باشد. در این‌صورت $U(r, \theta)$ در درون دیسک D همساز است و به‌ازای هر θ مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r \to r_\circ \\ r < r_\circ}} U(r, \theta) = g(\theta).$$

یعنی U یک جواب مسئله دیریکله پوآسن در قرص D است به‌این‌معنی که وقتی (r, θ) در امتداد یک شعاع به سمت $(r_\circ, \theta_\circ)$ میل کند، به‌جز در تعدادی متناهی نقطهٔ $(r_\circ, \theta)$ روی مرز دیسک که g در آنها ناپیوسته است، $U(r, \theta)$ به مقدار مرزی $g(\theta)$ میل می‌کند.

علت. چون هسته پوآسن P به‌عنوان تابعی از r و θ در درون دیسک D همساز است در نتیجه تابع U نیز در درون دیسک همساز خواهد بود. به‌عبارت دقیق‌تر چون g قطعه‌قطعه پیوسته است، انتگرال (۲.۳) را می‌توان به‌صورت تعدادی متنهایی از انتگرال‌های معین نوشت که در هرکدام از آنها تابع زیر انتگرال نسبت به متغیرهای r، ϕ و θ مشتق‌پذیر با مشتقات پیوسته می‌باشد. چون ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را می‌توان عوض کرد و به‌علاوه چون در مختصات قطبی (r, θ) برای P داریم:

$$r^2 P_{rr} + r P_r + P_{\theta\theta} = 0$$

پس نتیجه می‌شود که U نیز در معادله فوق صدق می‌کند.

برای قسمت دوم، اثبات درستی حد، کافی است نشان دهیم اگر g در θ پیوسته باشد آن‌گاه برای هر $\epsilon > 0$ داده شده یک $\delta > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $0 < r_\circ - r < \delta$، داریم:

$$|U(r, \theta) - g(\theta)| < \epsilon.$$

با توجه به‌این‌که $\int_0^{2\pi} P(r_\circ, r, \phi - \theta)\, d\phi = 2\pi$، می‌توان نوشت:

$$U(r, \theta) - g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_\circ, r, \phi - \theta)[g(\phi) - g(\theta)]\, d\phi.$$

برای راحتی در ادامه فرض می‌کنیم که g به‌صورت متناوب با دوره تناوب 2π توسعه یافته است و در نتیجه عبارت زیر انتگرال در (۲.۳) تابعی متناوب با دوره تناوب 2π از متغیر ϕ خواهد بود.

چون g در θ پیوسته است عدد $\alpha > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $0 < |\phi - \theta| \le \alpha$، داریم:

$$|g(\phi) - g(\theta)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{۳.۳}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$U(r,\theta)-g(\theta)=I_1(r,\theta)+I_2(r,\theta)$$

که در آن

$$I_1(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha}P(r_0,r,\phi-\theta)[g(\phi)-g(\theta)]\,d\phi$$

و

$$I_2(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)[g(\phi)-g(\theta)]\,d\phi.$$

با توجه به مثبت بودن هسته پوآسن $P(r_0,r,\phi-\theta)$ و رابطه (۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}|I_1(r,\theta)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha}P(r_0,r,\phi-\theta)|g(\phi)-g(\theta)|\,d\phi\\ &< \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi}P(r_0,r,\phi-\theta)\,d\phi=\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

از شکل ۳۴.۳ واضح است که عبارت $|s-z|^2$ در مخرج کسر هسته پوآسن وقتی متغیر ϕ، به‌عنوان تابعی از s، روی بازه بسته $[\theta+\alpha,\theta-\alpha+2\pi]$ تغییر می‌کند، مقدار مینیمم مثبت m را اختیار می‌کند. پس اگر M یک کران بالا برای عبارت $|g(\phi)-g(\theta)|$ روی بازه $0\le\phi\le 2\pi$ باشد، می‌توان نوشت:

$$|I_2(r,\theta)|\le 2\pi\cdot\frac{(r_0^2-r^2)M}{2\pi m}<\frac{2Mr_0}{m}(r_0-r)<\frac{2Mr_0}{m}\cdot\delta=\frac{\epsilon}{2}$$

برای هر $0<r_0-r<\delta$، که در آن

$$\delta=\frac{m\epsilon}{4Mr_0}.$$

نهایتاً از نامساوی مثلث نتیجه می‌شود:

$$|U(r,\theta)-g(\theta)|\le|I_1(r,\theta)|+|I_2(r,\theta)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

برای هر $0<r_0-r<\delta$، که در آن δ به‌صورت داده شده فوق باشد. به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

مثال ۲۱.۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned}&T_{xx}+T_{yy}=0, \qquad x^2+y^2\le 1\\ &T(x,y)=\begin{cases}1 & x^2+y^2=1,\ y<0\\ 0 & x^2+y^2=1,\ y>0\end{cases}\end{aligned}$$

حل. شرایط مرزی مسئله را در مختصات قطبی به‌صورت زیر داریم:

$$T(1,\theta)=\begin{cases}0 & 0<\theta<\pi\\ 1 & \pi<\theta<2\pi.\end{cases}$$

طبق خاصیت اخیر جواب مسئله در مختصات قطبی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}T(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}T(1,\theta)\,d\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}P(1,r,\phi-\theta)\,d\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}\,d\phi\\&=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\phi-\theta}{2}\right)\Bigg|_\pi^{2\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right)\right].\end{aligned}$$

اگر از طرفین رابطه اخیر $\tan$ بگیریم و ساده‌سازی‌های لازم را انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$T(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{1-r^2}{2r\sin\theta}$$

یا در مختصات دکارتی

$$T(x,y)=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\frac{1-x^2-y^2}{2y}.$$

که در فوق $\tan^{-1}t$ به شاخه‌ای اشاره دارد که $0\le\tan^{-1}t\le\pi$ باشد.

نکته. مثال فوق که حالت خاصی از مثال (۱۶.۳)، با $T_0=0$ و $T_1=1$، است به‌کمک فرمول انتگرال پوآسن (۱.۳) حل شده است. راه حل فوق کوتاه‌تر از روش حل قبلی است.

تذکر. چون هسته پوآسن برای $r<r_0$ تعریف می‌شود، به‌کمک سری هندسی می‌توان نشان داد:

$$P(r_0,r,\psi)=\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\psi)+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos(n\psi).$$

پس:

$$\begin{aligned} U(r,\theta) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} P(r_{۰},r,\phi-\theta)g(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi}\left(۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}(\frac{r}{r_{۰}})^n\cos\left(n(\phi-\theta)\right)\right)g(\phi)\,d\phi \\ &= \frac{a_{۰}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{r_{۰}}\right)^n(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)). \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

که در آن

$$a_n=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} g(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi$$

و

$$b_n=\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} g(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi.$$

رابطه (۴.۳) یادآور نمایش جواب مسئله پوآسن به‌صورت سری فوریه می‌باشد که قبلاً در فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای مطالعه شده است.

تذکر. فرض کنید I_h معرف تابع ضربه یکه متناهی زیر باشد:

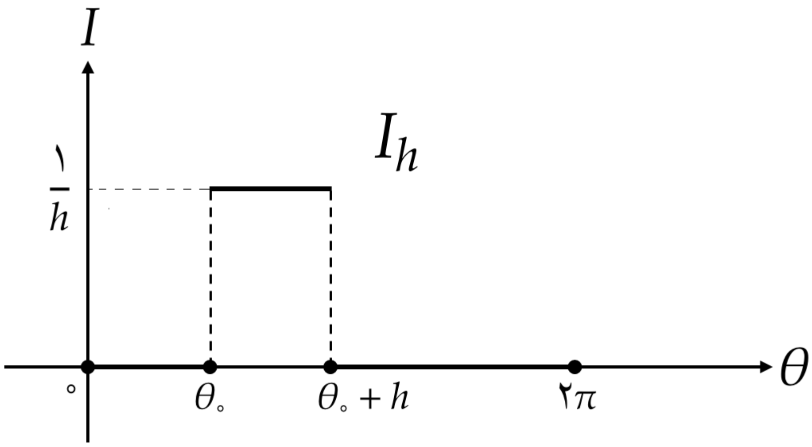
$$I(h,\theta-\theta_{۰})=\begin{cases}\frac{۱}{h} & \theta_{۰}\leq\theta\leq\theta_{۰}+h\\ ۰ & ۰\leq\theta<\theta_{۰} \text{ یا } \theta_{۰}+h<\theta\leq ۲\pi.\end{cases}$$

که در آن h یک عدد ثابت است و $۰\leq\theta_{۰}<\theta_{۰}+h<۲\pi$. توجه کنید که

$$\int_{\theta_{۰}}^{\theta_{۰}+h} I(h,\theta-\theta_{۰})\,d\theta=۱.$$

به شکل ۳۵.۳ توجه کنید. به‌کمک قضیه مقدار میانگینی برای انتگرال معین می‌توان نشان داد که عدد $\xi\in[\theta_{۰},\theta_{۰}+h]$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} &\int_{۰}^{۲\pi} P(r_{۰},r,\phi-\theta)I(h,\phi-\theta_{۰})\,d\phi \\ &\qquad = P(r_{۰},r,\xi-\theta)\int_{\theta_{۰}}^{\theta_{۰}+h} I(h,\phi-\theta_{۰})\,d\phi \\ &\qquad = P(r_{۰},r,\theta-\xi). \end{aligned}$$



شکل ۳.۳۵

بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰}\int_{۰}^{۲\pi} P(r_۰, r, \phi-\theta) I(h, \phi-\theta_۰)\, d\phi = P(r_۰, r, \theta-\theta_۰).$$

پس هسته پوآسن $P(r_۰, r, \theta-\theta_۰)$ را می‌توان به‌صورت حد دنباله‌ای از توابع مانند $G_h(r,\theta)$ که درون دایره $r = r_۰$ همساز هستند و مقدار مرزی آن‌ها نیز برابر با تابع ضربه متناهی $I(h, \theta-\theta_۰)$ می‌باشند، داشت. یعنی:

$$P(r_۰, r, \theta-\theta_۰) = \lim_{h\to ۰} G_h(r,\theta)$$

که در آن $G_h(r,\theta)$ جواب مسئله دیریکله زیر است:

$$\begin{cases} \Delta u = ۰, & D = \{(r,\theta) : r < r_۰,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\} \\ u = I(h, \theta-\theta_۰), & \partial D. \end{cases}$$

چون تابع ضربه متناهی $I(h, \theta-\theta_۰)$ به تابع دلتای دیراک $\delta_{\theta_۰}$ میل می‌کند، می‌گویند هسته پوآسن $P(r, r_۰, \theta-\theta_۰)$ جواب صوری مسئله دیریکله زیر است:

$$\begin{cases} \Delta u = ۰, & D = \{(r,\theta) : r < r_۰,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\} \\ u = \delta_{\theta_۰}, & \partial D. \end{cases}$$

به‌عبارت دیگر به‌کمک خاصیت ۹.۳ داریم:

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)} u(r_0,\phi)\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)} \delta_{\theta_0}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\phi-\theta)} \delta(\phi-\theta_0)\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\theta_0-\theta)}\,d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2rr_0\cos(\theta_0-\theta)}\int_0^{2\pi} d\phi \\
&= P(r,r_0,\theta-\theta_0).
\end{aligned}$$

حالت ۲) شرط مرزی نیومن: شکل ۳۴.۳ را در نظر بگیرید و قرار دهید $s = r_0 e^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$ که در آن $r < r_0$. برای s ثابت تعریف کنید:

$$\begin{aligned}
Q(r_0,r,\phi-\theta) &= -2r_0 \ln|s-z| \\
&= -r_0 \ln[r_0^2 - rr_0\cos(\phi-\theta)+r^2].
\end{aligned}$$

تابع فوق در داخل دایره $|z| = r_0$ همساز است زیرا مولفه حقیقی تابع تحلیلی $-2r_0\log(z-s)$ است که در آن منظور از $\log(\cdot)$ شاخه لگاریتمی $\operatorname{Log}_\phi(\cdot)$ است. اگر به‌علاوه $r \neq 0$، داریم:

$$\begin{aligned}
Q_r(r_0,r,\phi-\theta) &= -\frac{r_0}{r}\left[\frac{2r^2-2r_0\cos(\phi-\theta)}{r_0^2-rr_0\cos(\phi-\theta)+r^2}\right] \\
&= \frac{r_0}{r}[P(r_0,r,\phi-\theta)-1].
\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

که در آن P همان هسته پوآسن است. خواهیم دید برای نوشتن نمایش انتگرالی تابع همساز u که مشتق نرمال u_r آن بر دایره $r = r_0$ مقادیر از قبل تعیین شده $g(\theta)$ را بگیرد، می‌توان از تابع Q استفاده کرد.

اگر g قطعه‌به‌قطعه پیوسته و u_0 ثابتی دلخواه باشد، تابع

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0,r,\phi-\theta)g(\phi)\,d\phi + u_0, \qquad r < r_0 \tag{۶.۳}$$

را که همساز است، در نظر بگیرید. اگر مقدار میانگین g بر دایره $|z| = r_\circ$ صفر باشد، یعنی:

$$\int_\circ^{۲\pi} g(\phi)\, d\phi = \circ$$

آن‌گاه با توجه به رابطه (۵.۳) داریم:

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= \frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} \frac{r_\circ}{r}\,[P(r_\circ, r, \phi-\theta) - ۱]\, g(\phi)\, d\phi \\ &= \frac{r_\circ}{۲\pi r}\int_\circ^{۲\pi} P(r_\circ, r, \phi-\theta) g(\phi)\, d\phi. \end{aligned}$$

اما طبق خاصیت ۹.۳ برای θ مشخصی که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ \\ r<r_\circ}} \int_\circ^{۲\pi} P(r_\circ, r, \phi-\theta) g(\phi)\, d\phi = ۲\pi g(\theta).$$

پس:

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ \\ r<r_\circ}} u_r(r,\theta) = g(\theta).$$

در نتیجه خاصیت زیر را به‌دست آورده‌ایم:

خاصیت ۱۰.۳. فرض کنید D دیسک $|z| \le r_\circ$، g مثل فوق قطعه‌به‌قطعه پیوسته و به‌علاوه مقدار میانگین g بر دایره $|z| = r_\circ$ صفر باشد. همچنین $u = u(r,\theta)$، برای $r < r_\circ$، را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u(r,\theta) = -\frac{r_\circ}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} \ln[r_\circ^۲ - r r_\circ \cos(\phi-\theta) + r^۲]\, g(\phi)\, d\phi + u_\circ$$

در این‌صورت $u(r,\theta)$ در درون دیسک D همساز است و به‌ازای هر θ مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{r\to r_\circ \\ r<r_\circ}} u_r(r,\theta) = g(\theta).$$

یعنی u یک جواب مسئله نیومن پوآسن در قرص D است به‌این‌معنی که وقتی (r,θ) در امتداد یک شعاع به سمت $(r_\circ, \theta_\circ)$ میل کند، به‌جز در تعدادی متناهی نقطهٔ $(r_\circ, \theta)$ روی مرز دیسک که g در آنها ناپیوسته است، $U_r(r,\theta)$ به مقدار مرزی $g(\theta)$ میل می کند.

به‌علاوه ضابطه $u(r,\theta)$ و شرط صفر بودن میانگین g بر دایره $|z| = r_\circ$ نتیجه می‌دهد که $u_\circ = u(\circ,\theta)$.

فرمول انتگرال پوآسن برای نیم‌دیسک بالایی

فرض کنید تابع شرط مرزی g که روی دایره $r = r_\circ$ به‌صورت پارامتری $g(\theta)$، $\circ \leq \theta \leq ۲\pi$، تعریف می‌شود قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد.

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: اگر $g(۲\pi - \theta) = -g(\theta)$ باشد در این‌صورت فرمول انتگرال پوآسن (۱.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$U(r,\theta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^\pi \big[P(r_\circ, r, \phi - \theta) - P(r_\circ, r, \phi + \theta)\big] g(\phi)\, d\phi.$$

مقدار تابع U فوق بر شعاع‌های افقی $\theta = \circ$ و $\theta = \pi$ از دیسک $|z| \leq r_\circ$ همان‌طور که در صورت تغییر U به‌عنوان دمای حالت ماندگار انتظار می‌رود، صفر است. پس فرمول بالا مسئله دیریکله برای نیم‌دیسک بالایی

$$\Big\{(r,\theta) : \circ < \theta < \pi, r < r_\circ\Big\}$$

را حل می‌کند که بر قطر منطبق بر محور xها شرط مرزی دیریکله صفر داریم و برای هر $\theta \in (\circ, \pi)$ مشخص که g در آن پیوسته باشد:

$$\lim_{\substack{r \to r_\circ \\ r < r_\circ}} U(r,\theta) = g(\theta).$$

حالت ۲) شرط مرزی دیریکله-نیومن: اگر $g(۲\pi - \theta) = g(\theta)$ باشد در این‌صورت فرمول انتگرال پوآسن (۱.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$U(r,\theta) = \frac{۱}{۲\pi} \int_\circ^\pi \big[P(r_\circ, r, \phi - \theta) + P(r_\circ, r, \phi + \theta)\big] g(\phi)\, d\phi.$$

برای تابع U فوق بر شعاع‌های افقی $\theta = \circ$ و $\theta = \pi$ از دیسک $|z| \leq r_\circ$، مشتق نرمال یعنی U_θ صفر است. پس فرمول بالا مسئله دیریکله برای نیم‌دیسک بالایی را حل می‌کند که بر قطر منطبق بر محور xها شرط مرزی نیومن صفر داریم و برای هر $\theta \in (\circ, \pi)$ مشخص که g در آن پیوسته باشد:

$$\lim_{\substack{r \to r_\circ \\ r < r_\circ}} U(r,\theta) = g(\theta).$$

فرمول انتگرال پوآسن برای بیرون دیسک

تابع تحلیلی $Z = \frac{r_\circ^2}{z}$، دایره $|Z| = r_\circ$ و درون آن در صفحه $Z = X + iY$ را به‌ترتیب به دایره $|z| = r_\circ$ و خارج آن در صفحه $z = x + iy$ می‌نگارد. با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ و $Z = Re^{i\psi}$ داریم $r = \frac{r_\circ^2}{R}$ و $\theta = 2\pi - \psi$. پس تابع همساز $U(r,\theta)$ که با فرمول (۱.۳) تعریف می‌شود به تابع همساز زیر که در میدان $|z| > r_\circ$ همساز است، تبدیل می‌شود:

$$U\left(\frac{r_\circ^2}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} \frac{r_\circ^2 - R^2}{r_\circ^2 - 2r_\circ R\cos(\phi + \psi) + R^2} g(\phi)\, d\phi.$$

حال به‌این‌دلیل که اگر $u(r, +\theta)$ همساز باشد آن‌گاه $u(r, -\theta)$ نیز همساز است، بنابراین تابع

$$H(R,\psi) = U\left(\frac{r_\circ^2}{R}, \psi - 2\pi\right)$$

یا

$$H(R,\psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} P(r_\circ, R, \phi - \psi) g(\phi)\, d\phi \tag{۷.۳}$$

با شرط $R > r_\circ$ نیز همساز است. همچنین به‌ازای هر ψ که در آن $g(\psi)$ پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{R\to r_\circ \\ R>r_\circ}} H(R,\psi) = g(\psi). \tag{۸.۳}$$

پس فرمول (۷.۳) مسئله دیریکله را برای بیرون دیسک، یعنی $|z| > r_\circ$، با شرط مرزی (۸.۳) حل می‌کند. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که حد این جواب در بینهایت به‌صورت زیر است:

$$\lim_{R\to\infty} H(R,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_\circ^{2\pi} g(\phi)\, d\phi.$$

فرمول انتگرال پوآسن برای نیم‌صفحه بالایی

حالت ۱) شرط مرزی دیریکله: فرض کنید f در نیم‌صفحه بالایی، یعنی $\Im z \geq \circ$، تابعی تحلیلی از z باشد و برای a و M مثبتی شرط رشد زیر را نیز دارا باشد:

$$|z^a f(z)| < M, \quad \Im z \geq \circ.$$

برای z مشخص با $\Im z > 0$ به‌کمک فرمول انتگرال کشی می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{9.3}$$

که در آن C_R نیم‌دایره بالایی صفحه به مرکز مبدأ و شعاع R است به‌طوری‌که $R > |z|$. به‌وضوح تخمین زیر برقرار است:

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(s)}{s-z}\,ds\right| \le \frac{M\pi}{R^a\left(1-\frac{|z|}{R}\right)}.$$

در نتیجه برای $\Im z > 0$، با میل دادن $R \to \infty$، از تساوی‌های فوق به‌دست می‌آوریم:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\,dt. \tag{10.3}$$

طبق شرط رشد فوق برای f انتگرال فوق همگرا است.

در صورتی که z در زیر محور حقیقی واقع باشد، سمت راست رابطهٔ (۹.۳) و در نتیجه انتگرال (۱۰.۳) برای آن صفر خواهد بود. پس برای z در نیم‌صفحه بالایی و برای هر عدد ثابت C می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} + \frac{C}{t-\overline{z}}\right) f(t)\,dt.$$

برای $C = 1$ و $C = -1$ به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t-z|^2}\,dt, \qquad y > 0$$

و

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-x) f(t)}{|t-z|^2}\,dt, \qquad y > 0.$$

اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$، آن‌گاه از فرمول‌های بالا نتیجه می‌شود که توابع همساز u و v در نیم‌صفحه بالایی بر حسب مقادیر مرزی u و v به‌وسیلهٔ فرمول‌های زیر نمایش داده می‌شوند. یعنی برای $y > 0$ داریم:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t,0)}{|t-z|^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y u(t,0)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt \tag{11.3}$$

و

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-t) v(t,0)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt.$$

فرمول (۱۱.۳) به فرمول انتگرال پوآسن برای نیم‌صفحه بالایی یا فرمول انتگرال شوارتس معروف است.

تعریف ۴.۳. فرض کنید g تابعی حقیقی مقدار کراندار و قطعه‌به‌قطعه پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. $u = u(x,y)$ را که به‌صورت

$$u(x,y) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(t)}{(t-x)^{۲}+y^{۲}}\,dt \tag{۱۲.۳}$$

تعریف می‌شود، تبدیل شوارتس g گویند.

خاصیت زیر بیان می‌کند که تبدیل شوارتس حل مسئله پوآسن در نیم‌صفحه بالایی را ممکن می‌سازد.

خاصیت ۱۱.۳. فرض کنید g مثل فوق و $u(x,y)$ تبدیل شوارتس آن، یعنی (۱۲.۳) باشد. آن‌گاه $u(x,y)$ در نیم‌صفحه بالایی همساز است و به‌ازای هر x مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y\to ۰\\ y>۰}} u(x,y) = g(x). \tag{۱۳.۳}$$

یعنی u یک جواب مسئله دیریکله پوآسن در نیم‌صفحه بالایی است به‌این‌معنی که وقتی (x,y) در امتداد موازی محور yها به (x,y) میل کند، به‌جز در تعدادی متناهی نقطهٔ x روی محور حقیقی که g در آنها ناپیوسته است، $u(x,y)$ به مقدار مرزی $g(x)$ میل می کند.

علت. چون هسته تبدیل (۱۲.۳) به‌عنوان تابعی از (x,y) در نیم‌صفحه بالایی همساز است در نتیجه تابع $u(x,y)$ نیز در نیم‌صفحه بالایی همساز خواهد بود. زیرا انتگرال (۱۲.۳) را می‌توان به‌صورت تعدادی متنهایی از انتگرال‌های معین نوشت و ترتیب مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری را عوض کرد و به نتیجه مطلوب رسید.

برای اثبات درستی رابطه (۱۳.۳)، برای هر نقطه x که g در آن پیوسته باشد، تغییر متغیر $t = x + y\tan\tau$ را در (۱۲.۳) اعمال می‌کنیم تا به‌دست آوریم:

$$u(x,y) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} g(x+y\tan\tau)\,d\tau, \qquad y>۰.$$

حال اگر α یک مقدار مثبت کوچک باشد و همچنین قرار دهیم:

$$G(x,y,\tau) = g(x,y,\tau) - g(x)$$

می‌توان نوشت:

$$\pi\,[u(x,y)-g(x)] = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} G(x,y,\tau)\,d\tau = I_۱(x,y) + I_۲(x,y) + I_۳(x,y)$$

که در آن

$$I_۱(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{-\frac{\pi}{۲}+\alpha} G(x,y,\tau)\,d\tau$$
$$I_۲(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{۲}+\alpha}^{\frac{\pi}{۲}-\alpha} G(x,y,\tau)\,d\tau$$
$$I_۳(x,y) = \int_{\frac{\pi}{۲}-\alpha}^{\frac{\pi}{۲}} G(x,y,\tau)\,d\tau.$$

اگر M یک کران بالایی برای $g(x)$ باشد، $|G(x,y,\tau)| \leq ۲M$ خواهد بود. برای $\epsilon > ۰$ داده شده، $\alpha > ۰$ را طوری اتخاذ کنید تا $۶M\alpha < \epsilon$ باشد. یعنی خواهیم داشت:

$$|I_۱(x,y)| \leq ۲M\alpha < \frac{\epsilon}{۳} \qquad \text{و} \qquad |I_۳(x,y)| \leq ۲M\alpha < \frac{\epsilon}{۳}.$$

حال برای این‌که اثبات کامل شود، کافی است نشان دهیم برای ϵ داده شده یک $\delta > ۰$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $۰ < y < \delta$، داریم:

$$|I_۲(x,y)| < \frac{\epsilon}{۳}.$$

چون g در x پیوسته است در نتیجه یک $\gamma > ۰$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $۰ < y|\tan\tau| < \gamma$، داریم:

$$|G(x,y,\tau)| < \frac{\epsilon}{۳\pi}.$$

از طرفی ماگزیمم مقدار $|\tan\tau|$ وقتی τ در بازه $[-\frac{\pi}{۲}+\alpha, \frac{\pi}{۲}+\alpha]$ تغییر می‌کند برابر $\cot\alpha$ است. در نتیجه اگر قرار دهیم $\delta = \gamma\tan\tau$، در این‌صورت برای هر $y \in (۰,\delta)$ خواهیم داشت:

$$|I_۲(x,y)| < \frac{\epsilon}{۳\pi}(\pi - ۲\alpha) < \frac{\epsilon}{۳}.$$

و نهایتاً چون

$$\pi|u(x,y) - g(x)| \leq |I_۱(x,y)| + |I_۲(x,y)| + |I_۳(x,y)| < \frac{\epsilon}{۳} + \frac{\epsilon}{۳} + \frac{\epsilon}{۳} = \epsilon$$

اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۲۲.۳. مثال ۱۷.۳ را این بار به‌کمک خاصیت فوق حل کنید.

حل. طبق خاصیت ۱۱.۳ برای حل مثال ۱۷.۳ یعنی:

$$\begin{aligned} &T_{xx}+T_{yy}=0, \qquad y>0,\ -\infty<x<+\infty\\ &T(x,0)=\frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} T(x,y)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yT(t,0)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\\ &=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-x)^2+y^2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\,dt, \qquad y>0. \end{aligned}$$

یافتن یک تابع اولیه برای محاسبه انتگرال ناسره فوق ممکن ولی دشوار است. هرچند که به‌کمک قضیه مانده‌ها می‌توان آن را محاسبه کرد و داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t-x)^2+y^2}\cdot\frac{t}{1+t^2}\,dt=2\pi i(c_1+c_2)$$

که در آن

$$c_1=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(\xi-x)^2+y^2}\cdot\frac{\xi}{1+\xi^2},\xi=i\right)$$

و

$$c_2=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(\xi-x)^2+y^2}\cdot\frac{\xi}{1+\xi^2},\xi=x+iy\right).$$

هر دو قطب $\xi_1=i$ و $\xi_2=x+iy$ از مرتبه اول هستند و داریم:

$$\begin{aligned} c_1&=\lim_{\xi\to i}(\xi-i)\cdot\frac{\xi}{(\xi^2-2x\xi+x^2+y^2)(1+\xi^2)}\\ &=\lim_{\xi\to i}\frac{\xi}{(\xi+i)(\xi^2-2x\xi+x^2+y^2)}=\frac{1}{2(-1-2ix+x^2+y^2)} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} c_2&=\lim_{\xi\to x+iy}(\xi-x+iy)\cdot\frac{\xi}{(\xi^2+1)(\xi^2-2x\xi+x^2+y^2)}\\ &=\lim_{\xi\to x+iy}\frac{\xi}{(\xi^2+1)(\xi-x+iy)}=\frac{x+iy}{2iy(x^2-y^2+2ixy+1)}. \end{aligned}$$

محاسبه‌ای ساده نتیجه می‌دهد:

$$2\pi i(c_1+c_2)=\frac{\pi x}{y(x^2+(y+1)^2)}$$

و در نتیجه:

$$T(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(t-x)^۲+y^۲}\cdot\frac{t}{۱+t^۲}\,dt = \frac{y}{\pi}\cdot\frac{\pi x}{y(x^۲+(y+۱)^۲)}$$
$$= \frac{x}{x^۲+(y+۱)^۲}.$$

حالت ۲) شرط مرزی نیومن: فرض کنید $g(x)$ تابعی حقیقی مقدار کراندار و قطعه‌به‌قطعه پیوسته روی $\mathbb{R}$ باشد. همچنین فرض کنید برای اعداد $a > ۱$ و $M > ۰$ شرط رشد زیر نیز برقرار باشد:

$$|x^a g(x)| < M, \qquad -\infty < x < \infty.$$

برای هر t، تابع $\operatorname{Log}|z-t|$ در نیم‌صفحه $\Im z > ۰$ همساز است. چون ترتیب مشتق و انتگرال را می‌توان عوض کرد، تابع

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z-t|\,g(t)\,dt + u_۰ \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t-x)^۲+y^۲]\,g(t)\,dt + u_۰, \qquad y>۰. \end{aligned} \tag{۱۴.۳}$$

که در آن $u_۰$ یک عدد ثابت حقیقی است در نیم‌صفحه بالایی همساز خواهد بود. با مشتق‌گیری از فرمول بالا داریم:

$$u_y(x,y) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y g(t)}{(t-x)^۲+y^۲}\,dt, \qquad y>۰.$$

پس طبق خاصیت ۱۱.۳ برای هر x که g در آن نقطه پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y\to ۰\\ y>۰}} u_y(x,y) = g(x).$$

پس خاصیت زیر به‌دست می‌آید:

خاصیت ۱۲.۳. فرض کنید g مثل فوق و $u(x,y)$ توسط (۱۴.۳) داده شده باشد. آن‌گاه $u(x,y)$ در نیم‌صفحه بالایی همساز است و به‌ازای هر x مشخص که g در آن پیوسته باشد، داریم:

$$\lim_{\substack{y\to ۰\\ y>۰}} u_y(x,y) = g(x).$$

یعنی u یک جواب مسئله نیومن پوآسن در نیم‌صفحه بالایی است به‌این‌معنی که وقتی (x,y) در امتداد موازی محور yها به (x,y) میل کند، به‌جز در تعدادی متناهی نقطهٔ x روی محور حقیقی که g در آنها ناپیوسته است، $u_y(x,y)$ به مقدار مرزی $g(x)$ میل می‌کند.

تذکر. اگر g تابعی فرد باشد، فرمول (۱۴.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$u(x,y)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\infty}\ln\left[\frac{(t-x)^{۲}+y^{۲}}{(t+x)^{۲}+y^{۲}}\right]g(t)\,dt+u_{۰},\qquad x>۰,\ y>۰.$$

این فرمول نمایش دهنده تابعی همساز در ربع اول، یعنی $x>۰$ و $y>۰$، می‌باشد و به‌علاوه در شرایط مرزی زیر نیز صدق می‌کند:

$$u(۰,y)=۰,\qquad y>۰,$$
$$\lim_{\substack{y\to۰\\y>۰}}u_y(x,y)=g(x),\qquad x>۰.$$

تمرین ۴.۳

۱. درستی عبارت زیر را برای $r<r_{۰}$ به‌کمک سری هندسی تحقیق کنید.

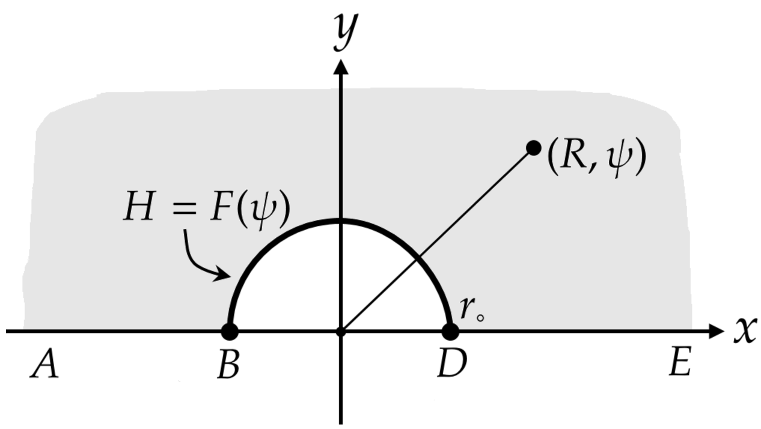
$$P(r_{۰},r,\psi)=\frac{r_{۰}^{۲}-r^{۲}}{r_{۰}^{۲}-۲r_{۰}r\cos(\psi)+r^{۲}}=۱+۲\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{r}{r_{۰}}\right)^{n}\cos(n\psi).$$

۲. فرمول‌های انتگرالی زیر را که حالت خاصی از فرمول (۷.۳) هستند، در نظر بگیرید:

$$H(R,\psi)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\left[P(r_{۰},R,\phi+\psi)-P(r_{۰},R,\phi-\psi)\right]g(\phi)\,d\phi$$
$$H(R,\psi)=-\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\left[P(r_{۰},R,\phi+\psi)+P(r_{۰},R,\phi-\psi)\right]g(\phi)\,d\phi.$$

نشان دهید آنها در میدان بی‌کران $R>r_{۰}$ و $۰<\psi<\pi$، که در شکل ۳۶.۳ نشان داده شده است همساز هستند و در شرط مرزی

$$\lim_{\substack{R\to r_{۰}\\R>r_{۰}}}H(R,\psi)=g(\psi),\qquad ۰<\psi<\pi$$



شکل ۳۶.۳

صدق می‌کنند و به‌علاوه مقدار تابع اولی بر پرتوهای BA و DE صفر و مقدار مشتق نرمال دومی بر پرتوهای BA و DE صفر هستند.

۳. به‌عنوان حالی خاصی از (۱۲.۳) نشان دهید

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_\circ^\infty \left[\frac{۱}{(t-x)^۲+y^۲} - \frac{۱}{(t+x)^۲+y^۲}\right] g(t)\,dt, \quad x>\circ, y>\circ$$

تابعی کراندار و همساز در ربع اول است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u(\circ,y)=\circ, \qquad y>\circ,$$
$$\lim_{\substack{y\to\circ\\ y>\circ}} u(x,y) = g(x), \qquad x>\circ, x\neq x_j$$

که در آن g به‌ازای همه xهای مثبت کران‌دار و به‌جز حداکثر تعدادی متناهی نقطه x_j که در آن g ناپیوسته است ولی حد چپ و راست متناهی دارد، پیوسته است.

۴. به‌عنوان حالی خاصی از (۱۲.۳) نشان دهید

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_\circ^\infty \left[\frac{۱}{(t-x)^۲+y^۲} + \frac{۱}{(t+x)^۲+y^۲}\right] g(t)\,dt, \quad x>\circ, y>\circ$$

تابعی کراندار و همساز در ربع اول است و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u_x(\circ,y)=\circ, \qquad y>\circ,$$
$$\lim_{\substack{y\to\circ\\ y>\circ}} u(x,y) = g(x), \qquad x>\circ, x\neq x_j$$

که در آن g به‌ازای همه xهای مثبت کران‌دار و به‌جز حداکثر تعدادی متناهی نقطه x_j که در آن g ناپیوسته است ولی حد چپ و راست متناهی دارد، پیوسته است.

۵. به‌عنوان حالت خاصی از فرمول (۶.۳) تابع

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\big[Q(r_۰,r,\phi-\theta)-Q(r_۰,r,\phi+\theta)\big]g(\phi)\,d\phi$$

را برای g قطعه‌به‌قطعه پیوسته در نظر بگیرید. نشان دهید u فوق در میدان $r<r_۰$ و $۰<\theta<\pi$ همساز و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u(r,۰)=u(r,\pi)=۰,\qquad r<r_۰$$

و به‌علاوه به‌ازای هر $۰<\theta<\pi$ که g در آن پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{r\to r_۰\\ r<r_۰}}u_r(r,\theta)=g(\theta).$$

۶. به‌عنوان حالت خاصی از فرمول (۶.۳) تابع

$$u(r,\theta)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}\big[Q(r_۰,r,\phi-\theta)+Q(r_۰,r,\phi+\theta)\big]g(\phi)\,d\phi$$

را برای g قطعه‌به‌قطعه پیوسته‌ای که مقدار میانگین آن بر دایره $|z|=r_۰$ صفر است، در نظر بگیرید. نشان دهید u فوق در میدان $r<r_۰$ و $۰<\theta<\pi$ همساز و در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$u_\theta(r,۰)=u_\theta(r,\pi)=۰,\qquad r<r_۰$$

و به‌علاوه به‌ازای هر $۰<\theta<\pi$ که g در آن پیوسته باشد داریم:

$$\lim_{\substack{r\to r_۰\\ r<r_۰}}u_r(r,\theta)=g(\theta).$$

۵.۳ مروری بر نگاشت‌های همدیس و کاربرد آن‌ها

هدف اصلی از این بخش تبدیل‌های میدان‌های "بد" از صفحه x و y به میدان خوب در صفحه u و v است. به‌این‌ترتیب که مسئله‌ای که در میدان‌های "بد" قابل حل نیست را تبدیل به مسئله‌ای کنیم که در میدان‌های خوب با روش‌های متداول قابل حل است. سپس آن را در میدان دوم حل و جواب را به میدان قبل انتقال می‌دهیم.

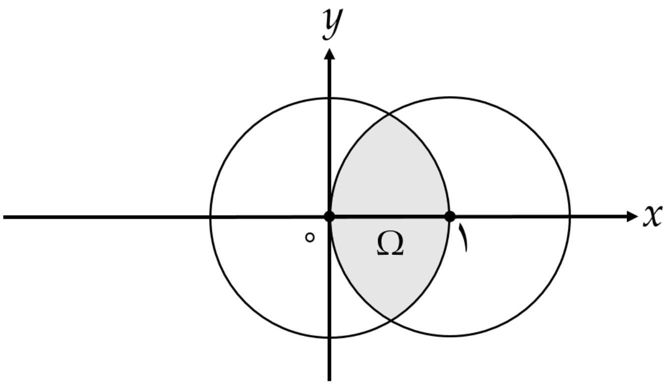
مثال ۲۳.۳. مطلوبست حل مسئله زیر

$$T_{xx}+T_{yy}=xy, \qquad (x,y)\in\Omega$$
$$T\Big|_{\partial\Omega}=x+y$$

که در اینجا میدان Ω میدان مشترک دو دیسک به‌صورت زیر است:

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲<۱,\ (x-۱)^۲+y^۲<۱\right\}.$$

به شکل ۳۷.۳ توجه کنید.

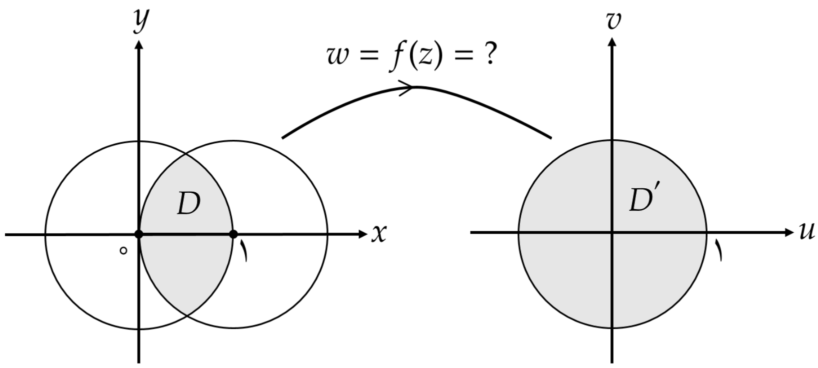


شکل ۳۷.۳

مسئله فوق یک مسئله پوآسن است. روی این میدان این مسئله با روش‌های فصل اوّل جزوه مشتقات پاره‌ای قابل حل نیست، چون پایه مناسب این میدان را نداریم. لیکن اگر این میدان را به نیم‌صفحه یا دیسک تبدیل کنیم قابل حل است. برای این منظور این میدان "بد" را با استفاده از یک نگاشت همدیس تبدیل به میدان "خوب" می‌کنیم. به‌این‌ترتیب به مسئله زیر خواهیم رسید:

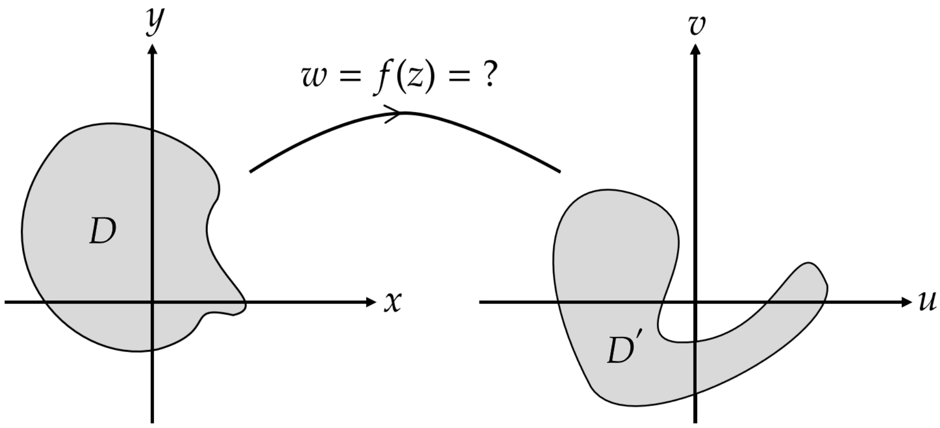
مسئله نوع ۱: میدان D در صفحه (x,y) یا همان z داده‌شده و میدان D' در صفحه (u,v) یا همان w داده شده‌است. تابع تحلیلی $w=f(z)$ را طوری تعیین می‌کنیم تا میدان D را به‌صورت ۱ – ۱ و پوشا و همدیس بر میدان D' بنگارد. مثلا به شکل ۳۸.۳ توجه کنید.

برای حل این مسئله ما می‌بایستی اطلاعاتی در مورد رفتار هندسی توابع ساده کسب کنیم و بدانیم این توابع یک میدان داده‌شده را به چه میدانی تبدیل می‌کنند. البته میدان داده‌شده از نظر هندسی یک میدان قابل بیان به‌وسیله اشکال هندسی مقدماتی است. پس مسئله زیر را برای مسئله فوق نیز بایستی بررسی کنیم.



شکل ۳۸.۳

مسئله نوع ۲: میدان D در صفحه z و تابع تحلیلی $w = f(z)$ داده شده‌است. مطلوب تعیین $D' = f(D)$ است. مثلا به شکل ۳۹.۳ توجه کنید.



شکل ۳۹.۳

در این بخش ما فقط چند تابع ساده زیر را در مورد مسئله نوع ۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱. نگاشت خطی یا تبدیل خطی $w = az + b$، به‌طوری‌که $a, b \in \mathbb{C}$.

۲. نگاشت معکوس یا تبدیل معکوس $w = \frac{1}{z}$.

۳. نگاشت نمایی $w = e^z$ و معکوس آن.

۴. نگاشت توانی $w = z^n$، به‌طوری‌که n یک عدد طبیعی و حول مبدأ.

۵. نگاشت مبیوس یا تبدیل مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$، به‌طوری‌که $ad - bc \neq ۰$.

تعریف ۵.۳. تابعی که دامنه و برد آن اشکال هندسی باشد را نگاشت می‌گویند. واژه تبدیل هم به‌صورت مشابه وقتی که کار جبری و هندسی انجام می‌گردد، به کار برده می‌شود.

نگاشت‌های فوق معمولاً در کتاب‌های ریاضی مهندسی و همچنین در این کتاب مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه فقط از این نگاشت‌ها بهره خواهیم گرفت.

برای حل مسئله نوع ۲ دو روش زیر متداول است:

روش اول هندسی: در این روش نگاشت داده‌شده را به چند نگاشت ساده تجزیه می‌کنیم و تصویر میدان داده‌شده را با اعمال متوالی این نگاشت‌ها به‌دست می‌آوریم.

روش دوم جبری: در این روش میدان D به‌وسیله نامعادلاتی به‌صورت

$$D : g_k(x, y) \leq ۰ \qquad k = ۱, ۲, ...$$

و نگاشت $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ که ممکن است در مختصات قطبی باشد، داده می‌شود. پس داریم

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

از این دو معادله x و y را برحسب u و v محاسبه و در نامعادلات D قرار می‌دهیم. به‌این‌ترتیب D' تصویر D به‌دست می‌آید.

مثال ۲۴.۳. تصویر میدان $|z - ۱| < ۱$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-۲}{z}$ به‌دست آورید.

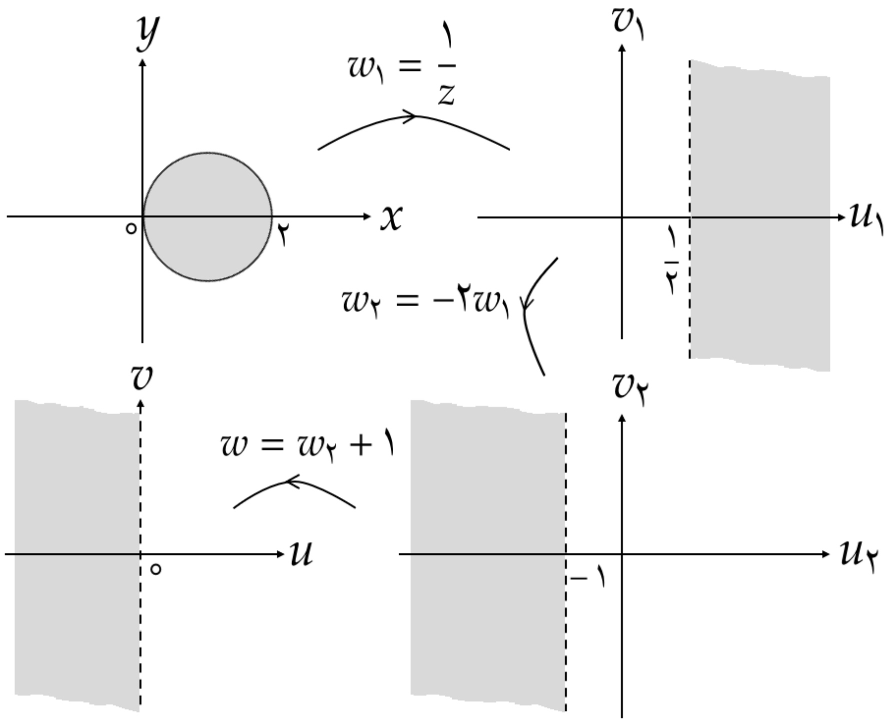
حل. ۱) روش هندسی: ابتدا نگاشت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$w = -۲ . \frac{۱}{z} + ۱, \quad w_۱ = \frac{۱}{z}, \quad w_۲ = -۲w_۱, \quad w = w_۲ + ۱.$$

حال با دنبال کردن تصاویر شکل ۴۰.۳ نتیجه می‌شود که $u < ۰$، یعنی نیم‌صفحه چپ، جواب است.

۲) روش جبری: از حل $w = \frac{z-۲}{z}$ برای z برحسب w به‌دست می‌آوریم:

$$w = -\frac{۲}{z} + ۱ \quad \Rightarrow \quad w - ۱ = -\frac{۲}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{۲}{۱ - w}.$$



شکل ۳.۴۰

حال در فرمول میدان قرار دهید

$$|z-۱|<۱ \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{۲}{۱-w}-۱\right|<۱ \quad\Rightarrow\quad |۲-۱+w|<|w-۱|$$
$$\Rightarrow |۱+w|<|۱-w| \quad\Rightarrow\quad |۱+w|^۲<|w-۱|^۲$$
$$\Rightarrow (u+۱)^۲+v^۲<(u-۱)^۲+v^۲ \quad\Rightarrow\quad ۲u<-۲u \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ۴u<\circ \quad\Rightarrow\quad u<\circ.$$

در بعضی مسائل نوشتن مطالب در مختصات قطبی حل را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۳.۲۵. تصویر خط $x+y=۱$ را تحت نگاشت $w=z^۲$ به‌دست آورید.

حل. ۱) روش جبری: برای محاسبه z برحسب w تابع را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم.

$$z=re^{i\theta}, \quad w=Re^{i\phi},$$
$$w=z^۲ \quad\Rightarrow\quad Re^{i\phi}=r^۲e^{۲i\theta} \quad\Rightarrow\quad R=r^۲, \phi=۲\theta$$
$$\Rightarrow\quad r=R^{\frac{۱}{۲}}, \theta=\frac{۱}{۲}\phi.$$

حال معادله خط را در مختصات قطبی می‌نویسیم.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$
$$x + y = ۱ \quad \Rightarrow \quad r(\cos\theta + \sin\theta) = ۱.$$

پس تصویر خط مذکور $R^{\frac{۱}{۲}}\left(\cos\frac{\phi}{۲} + \sin\frac{\phi}{۲}\right) = ۱$ می‌شود. با به توان دو رساندن خواهیم داشت

$$R(۱ + \sin\phi) = ۱ \quad \Rightarrow \quad R = \frac{۱}{۱ + \sin\phi}.$$

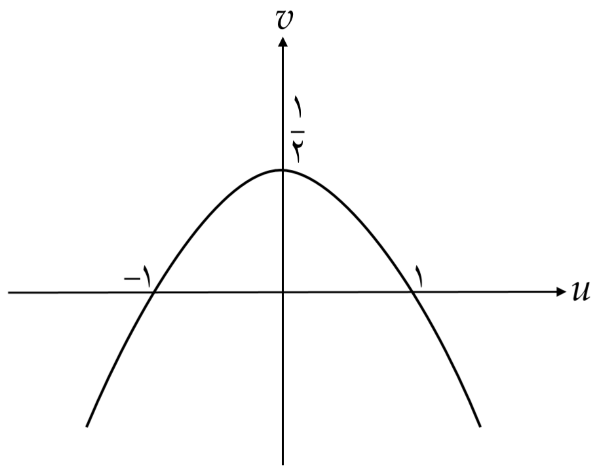
اگر رابطه فوق را در مختصات دکارتی بنویسیم

$$\sqrt{u^۲ + v^۲} + v = ۱ \quad \Rightarrow \quad u^۲ + v^۲ = (۱ - v)^۲ = v^۲ - ۲v + ۱$$

یا

$$v = \frac{۱}{۲}(۱ - u^۲)$$

یعنی تصویر یک سهمی است. به شکل ۴۱.۳ توجه کنید.



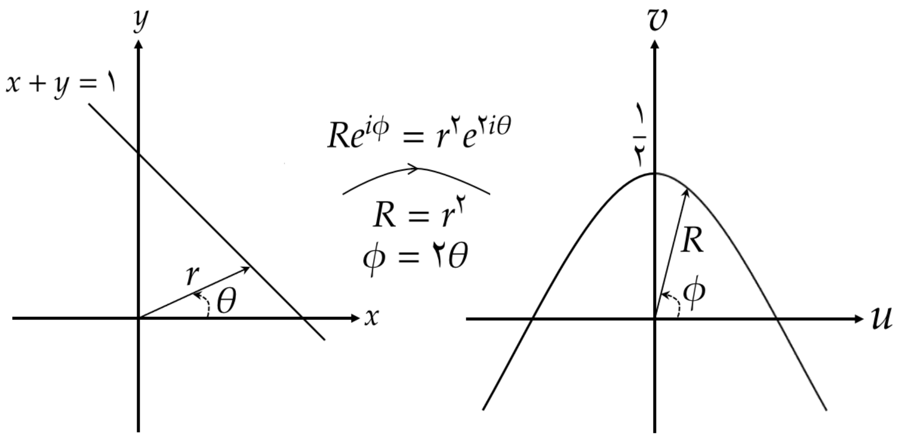
شکل ۴۱.۳

۲) روش هندسی: کافی است تصاویر شکل ۴۲.۳ را دنبال کنید.

مثال ۲۶.۳. تصویر هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$، به‌طوری‌که $x > ۰$ را تحت نگاشت $w = \frac{۱}{z}$ بیابید.

حل. ۱) روش جبری: برای نگاشت معکوس داریم $z = \frac{۱}{w}$. درنتیجه

$$R = \frac{۱}{r}, \quad \phi = -\theta, \quad y = -\frac{v}{u^۲ + v^۲}, \quad x = \frac{u}{u^۲ + v^۲}.$$



شکل ۴۲.۳

و هر یک از این مقادیر z برحسب w مسئله را حل می‌کند. در اینجا از مختصات دکارتی استفاده می‌کنیم

$$x^2-y^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}-\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=1$$

یا

$$u^2-v^2=(u^2+v^2)^2.$$

برای تشخیص منحنی جواب آن را در مختصات قطبی می‌نویسیم. یعنی

$$R^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=R^4 \quad \Rightarrow \quad R=\sqrt{\cos 2\phi}.$$

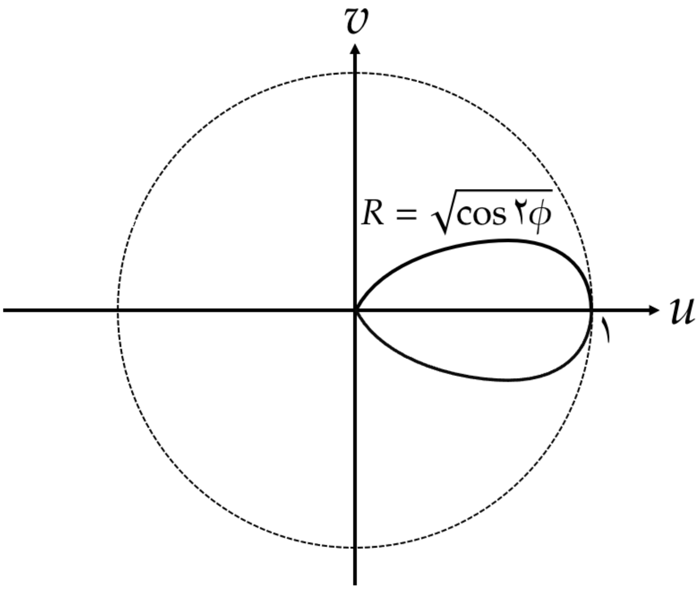
توجه کنید $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$. پس $-\frac{\pi}{4}<\phi<\frac{\pi}{4}$. با رسم نمودار در مختصات قطبی، منحنی تصویر به‌صورت شکل ۴۳.۳ است.

۲) روش هندسی: تصویر در داخل دایره واحد قرار می‌گیرد. تصاویر شکل ۴۴.۳ را ببینید.

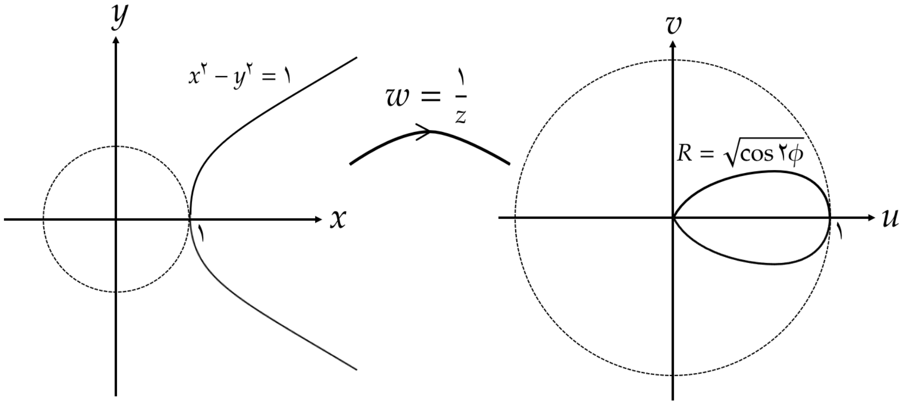
مثال ۲۷.۳. تصویر میدان $|x-1|<1$ و $|y|<\pi$ را تحت نگاشت $w=e^z$ بیابید.

حل. ۱) روش جبری: برای تعیین z برحسب w در نگاشت نمایی، z را در مختصات دکارتی و w را در مختصات قطبی در نظر می‌گیریم.

$$w=Re^{i\phi}, \qquad z=x+iy,$$
$$w=e^z \quad \Rightarrow \quad Re^{i\phi}=e^xe^{iy} \quad \Rightarrow \quad R=e^x,\ \phi=y.$$



شکل ۴۳.۳



شکل ۴۴.۳

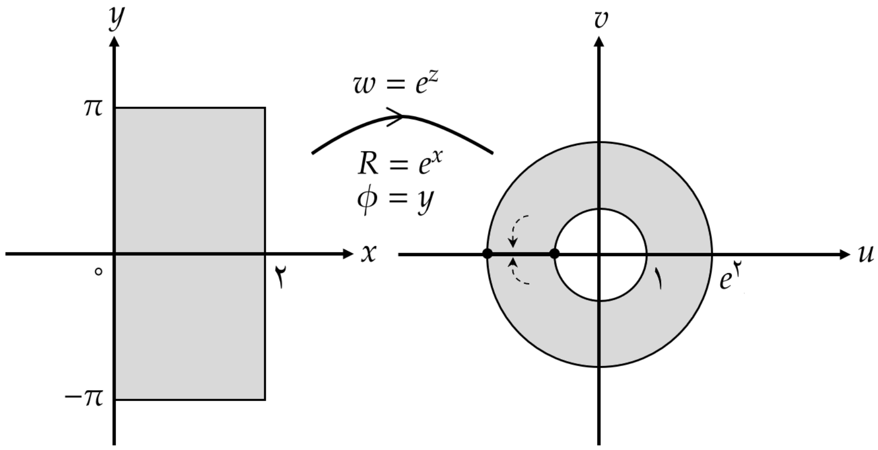
$$|x-۱|<۱ \quad \Rightarrow \quad -۱<x-۱<۱ \quad \Rightarrow \quad ۰<x<۲ \quad \Rightarrow$$
$$۱<e^x<e^۲ \quad \Rightarrow \quad ۱<R<e^۲,$$
$$|y|<\pi \quad \Rightarrow \quad |\phi|<\pi \quad \Rightarrow \quad -\pi<\phi<\pi.$$

به شکل ۴۵.۳ توجه کنید.

۲) روش هندسی: با استفاده از تساوی‌های زیر

$$۰<x<۲, \quad \phi=y, \quad R=e^x$$

و $-\pi<y<\pi$ تصویر هندسی شکل ۴۵.۳ قابل حصول است.



شکل ۴۵.۳

مثال ۲۸.۳. تصویر ناحیه $x > ۰$ و $y > ۰$ را تحت $w = \text{Log}\, z$ بیابید.

حل. ۱) روش جبری: برای این نگاشت z را در مختصات قطبی و w را در مختصات دکارتی در نظر می‌گیریم.

$$w = u + iv, \quad z = re^{i\theta}$$

$$w = \text{Log}\, z = \ln r + i\theta, \quad r > ۰, -\pi < \theta < \pi.$$

پس

$$u + iv = \ln r + i\theta \quad \Rightarrow \quad u = \ln r, \quad v = \theta$$

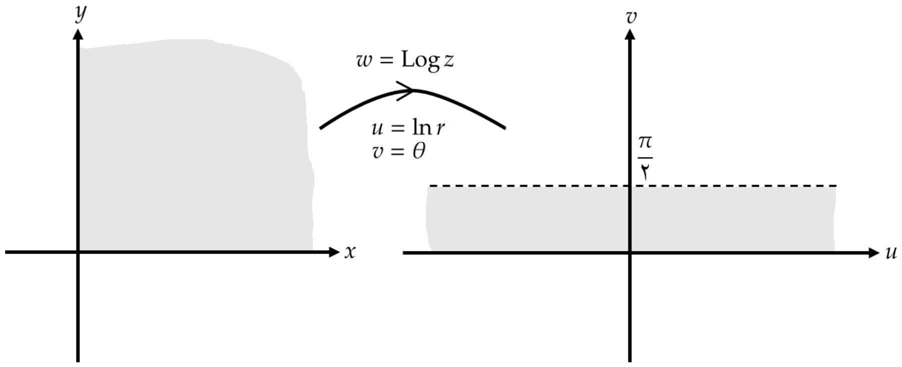
$$x > ۰, \quad y > ۰ \quad \Rightarrow \quad r > ۰, ۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \quad -\infty < u < \infty, \quad ۰ < v < \frac{\pi}{۲}.$$

به شکل ۴۶.۳ توجه کنید.

۲) روش هندسی: با استفاده از $u = \ln r$ و $v = \theta$ و با توجه به اینکه $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $r > ۰$، تصویر هندسی شکل ۴۶.۳ به‌دست می‌آید.

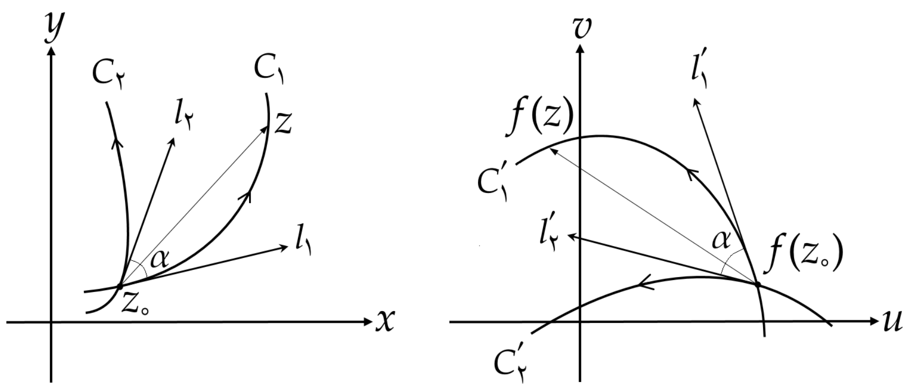
اکنون می‌توانیم به بررسی مسئله نوع اول نگاشت‌ها بپردازیم. در ابتدا یک بار دیگر این مسئله را بیان می‌کنیم.



شکل ۴۶.۳

مسئله نوع اول: میدان D در صفحه z و میدان D' در صفحه w داده شده است. تابع تحلیلی f را طوری بیابید تا میدان D را به‌صورت ۱ − ۱ و پوشا بر میدان D' بنگارد. یک چنین تابع تحلیلی را یک نگاشت همدیس (یا کانفرمال) می‌گویند.

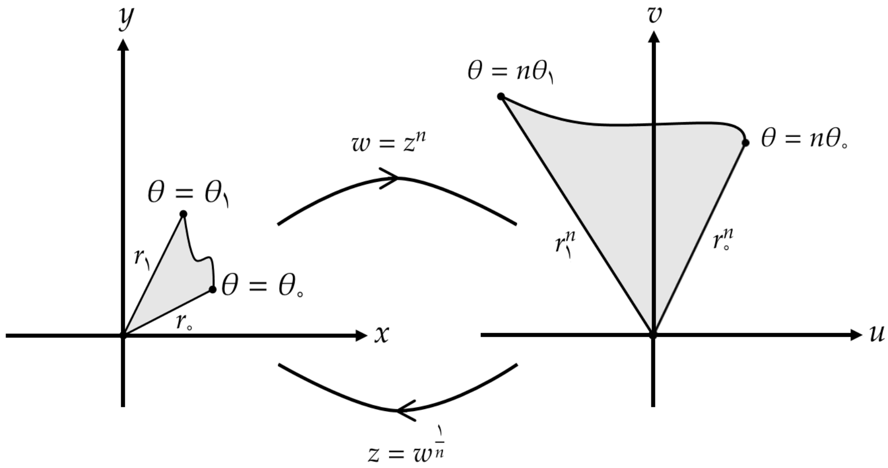
تعریف ۶.۳. نگاشتی که زاویه بین دو منحنی در صفحه z را بعد از تصویر در صفحه w هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت حفظ کند، نگاشت همدیس می‌گویند. به این معنی که اگر دو منحنی $C_{۱}$ و $C_{۲}$ از نقطه $z_{۰}$ بگذرند و $l_{۱}$ و $l_{۲}$ به‌ترتیب بردارهای مماس آن‌ها در نقطه $z_{۰}$ باشند و $C'_{۱}$ و $C'_{۲}$ هم به‌ترتیب تصویر $C_{۱}$ و $C_{۲}$ تحت اثر f و $l'_{۱}$ و $l'_{۲}$ بردارهای مماس بر آن‌ها در نقطه $f(z_{۰})$ باشند، آنگاه زاویه بین بردارهای مماس $l'_{۱}$ و $l'_{۲}$ برابر با زاویه بین بردارهای مماس $l_{۱}$ و $l_{۲}$ است. همچنین اگر $l_{۱}$ با دوران در جهت مثلثاتی به اندازه α بر $l_{۲}$ منطبق شود، $l'_{۱}$ نیز با دوران به اندازه α در جهت مثلثاتی بر $l'_{۲}$ منطبق گردد. به شکل ۴۷.۳ توجه کنید.



شکل ۴۷.۳

نگاشت‌هایی که برای حل مسائل نوع اول بیشتر مفیداند:

۱. نگاشت توانی $w = z^n$ حول مبدأ. شکل ۴۸.۳ را ببینید.

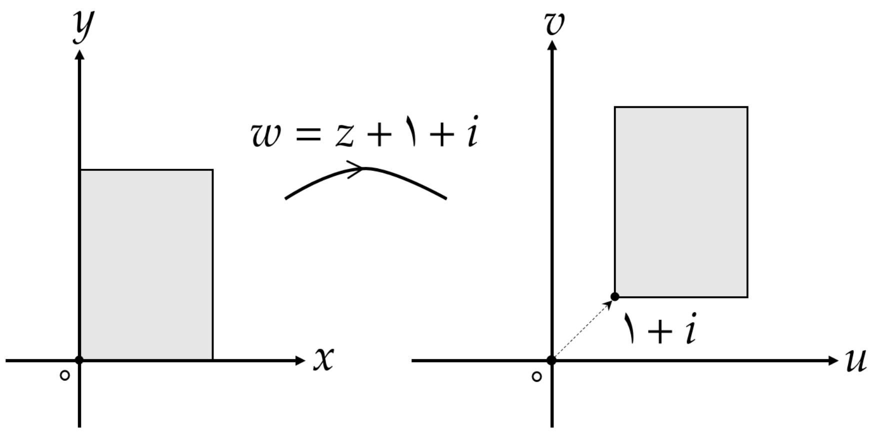


شکل ۴۸.۳

نگاشت معکوس آن عمل عکس انجام می‌دهد. نگاشت $w = z^n$ همه جا غیر از مبدأ همدیس است.

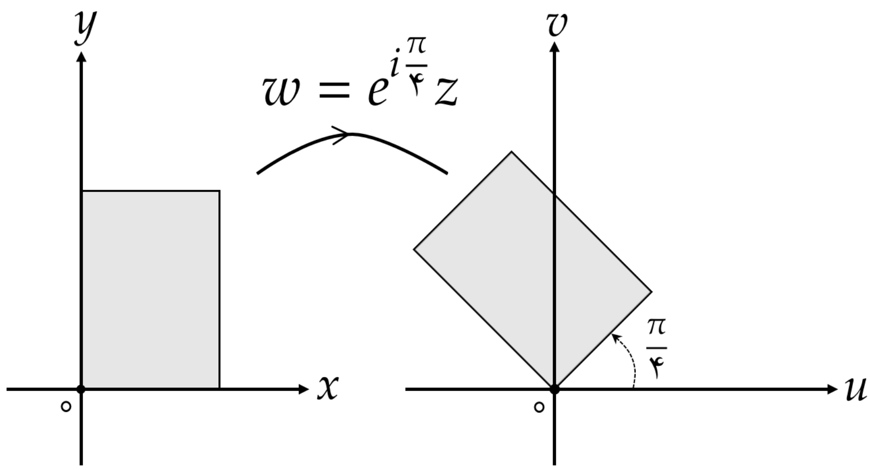
۲. صورت‌های گوناگون از نگاشت‌های مبیوس $w = \frac{az+b}{cz+d}$ به‌طوری‌که $ad - bc \neq 0$، در حل مسائل نوع اول بسیار مفیداند.

الف) انتقال $w = z + b$. شکل ۴۹.۳ را ببینید.



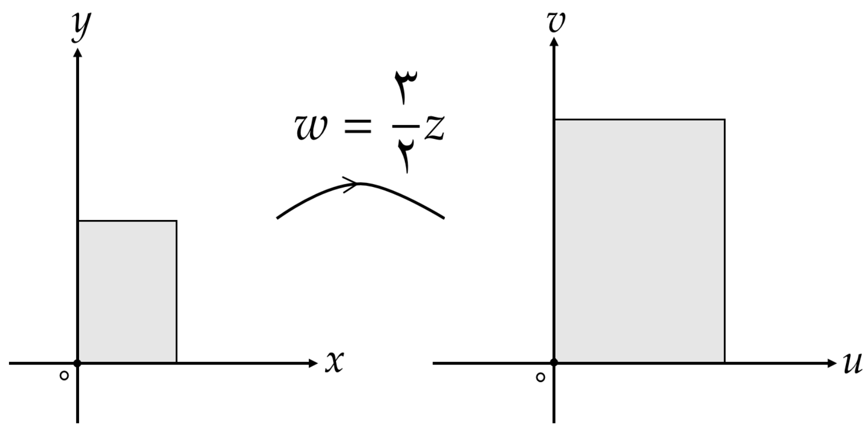
شکل ۴۹.۳

ب) دوران $w = e^{i\theta_0} z$. شکل ۵۰.۳ را ببینید.



شکل ۵۰.۳

ج) انبساط یا انقباض $w = r_\circ z$ به‌طوری‌که $r_\circ > \circ$. شکل ۵۱.۳ را ببینید.



شکل ۵۱.۳

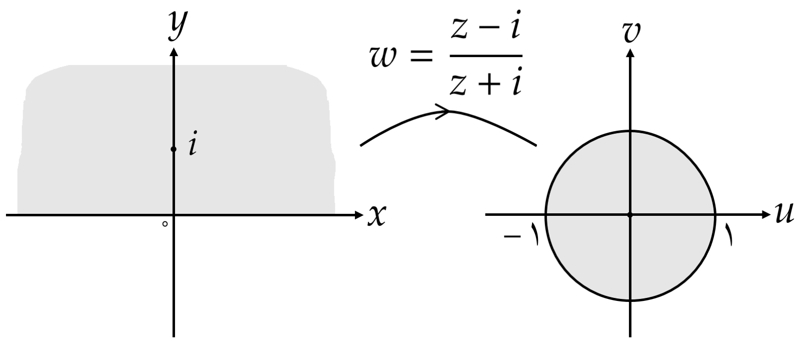
د) تبدیل نیم‌صفحه بالایی به دیسک واحد $w = \frac{z-z_\circ}{z-\bar{z}_\circ}$ به‌طوری‌که $\Im z_\circ > \circ$. معمولاً می‌گیریم، $z_\circ = i$. شکل ۵۲.۳ را ببینید.

ه) ناحیه بین دو دایره متقاطع یا یک دایره و یک خط قابل تبدیل به زاویه است. نگاشت $w = \frac{z-z_\circ}{z-z_۱}$، هر دو منحنی را به دو خط متقاطعی تصویر می‌کند که صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌نماید. شکل ۵۳.۳ را ببینید.

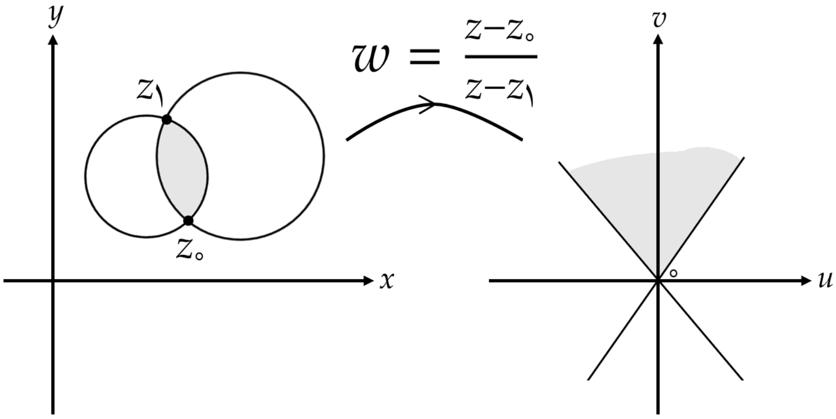
تذکر. یک نگاشت میبوس خط و دایره را به خط یا دایره تبدیل می‌کند.

۳. نگاشت نمایی $w = e^z$ نوار را به نیم‌صفحه تبدیل می‌کند. شکل ۵۴.۳ را ببینید.

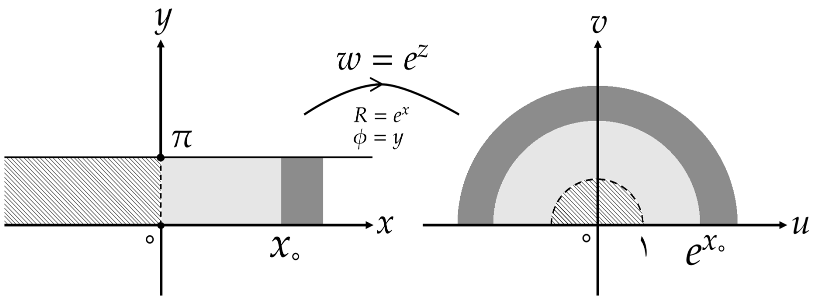
خاصیت زیر در تشخیص همدیس بودن تابع تحلیلی مفید است.



شکل ۵۲.۳



شکل ۵۳.۳



شکل ۵۴.۳

خاصیت ۱۳.۳. اگر تابع تحلیلی $f(z)$ در نقطه $z_\circ$ دارای $f'(z_\circ) \neq \circ$ باشد، آنگاه نگاشت f در نقطه $z_\circ$ همدیس است.

مثال ۲۹.۳. میدان بین دو دایره $|z| = ۱$ و $|z-۱| = ۱$ را به‌صورت ۱ − ۱ و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

حل. با یک نگاشت مبیوس این ناحیه تبدیل به یک زاویه به رأس مبدأ می‌شود. سپس زاویه به‌دست آمده نیز با تبدیل خطی و تبدیل توانی به نیم‌صفحه و نیم‌صفحه نیز با تبدیل مبیوس تبدیل به دیسک واحد می‌گردد. در ابتدا تلاقی بین دو دایره را به‌دست می‌آوریم.

$$|z| = ۱ \quad \Rightarrow \quad x^۲ + y^۲ = ۱$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{۱}{۲}$$

$$|z-۱| = ۱ \quad \Rightarrow \quad (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \quad y^۲ = ۱ - x^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

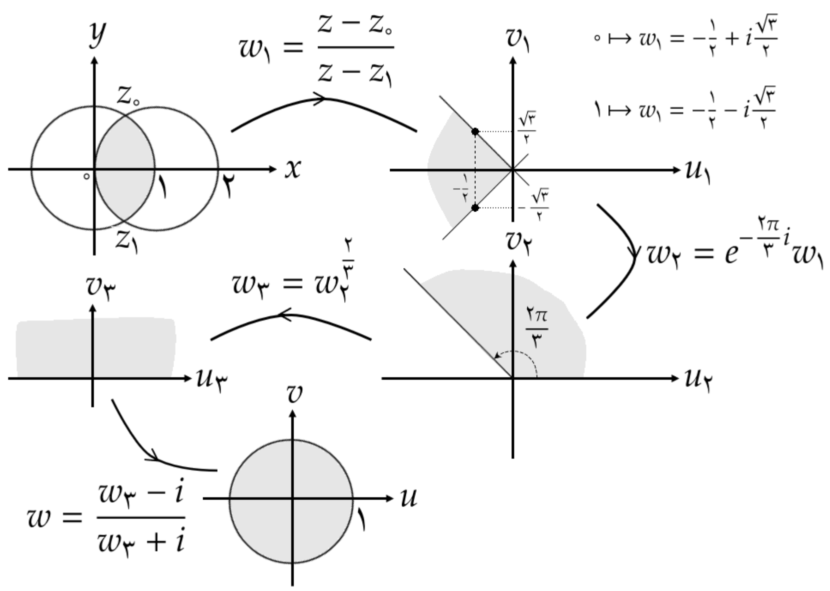
$$\Rightarrow \quad z_۰ = \frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad z_۱ = \frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}.$$

نگاشت مبیوس عبارت است از

$$w_۱ = \frac{z - z_۰}{z - z_۱}$$

به‌طوری‌که $z_۰ \mapsto w_۱ = ۰$ و $z_۱ \mapsto w_۱ = \infty$. همچنین توجه کنید که $z = ۰ \mapsto w_۱ = \frac{z_۰}{z_۱} = -\frac{۱}{۲} + i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $z = ۱ \mapsto w_۱ = \frac{۱-z_۰}{۱-z_۱} = -\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

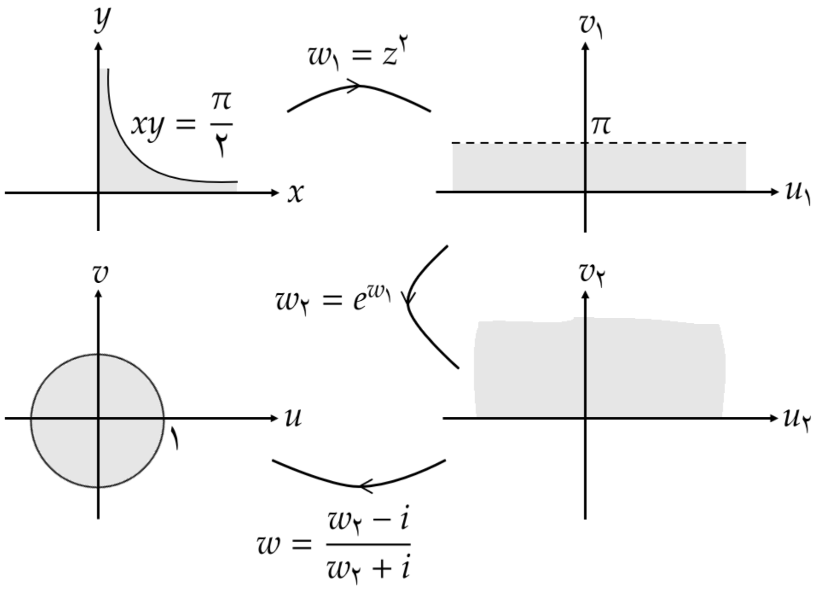
حال با توجه به شکل ۵۵.۳ معلوم می‌شود که $w(z) = w_۳(w_۲(w_۱(z)))$، نگاشت مطلوب است.



شکل ۵۵.۳

مثال ۳.۳۰. میدان $\left\{x > \circ, y > \circ, xy < \frac{\pi}{\text{۲}}\right\}$ را به‌صورت ۱ – ۱ و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

حل. کافی است شکل ۳.۵۶ را ببینید.



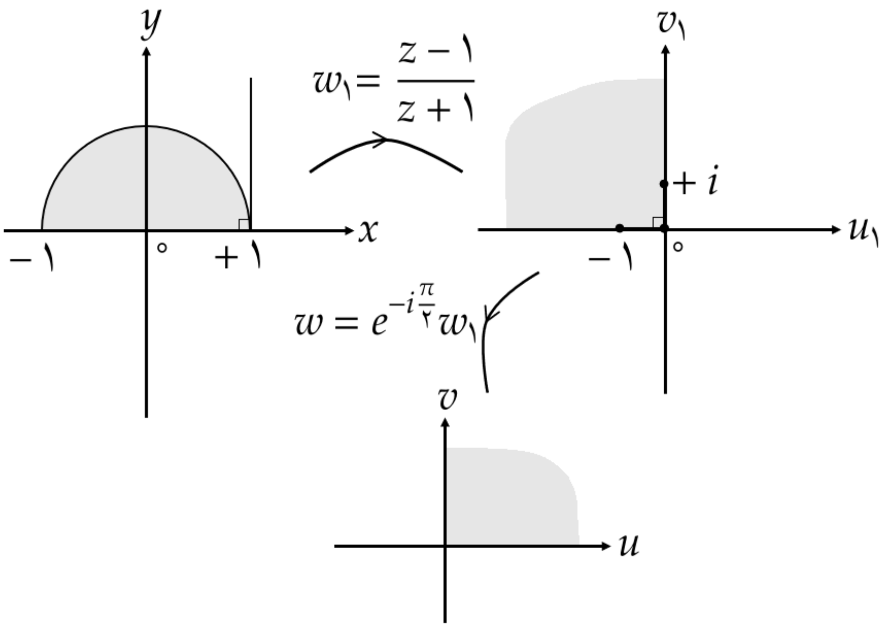
شکل ۳.۵۶

مثال ۳.۳۱. میدان $\{y > \circ,\ x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}\}$ را به‌صورت ۱ – ۱ و پوشا و همدیس بر ربع اول بنگارید.

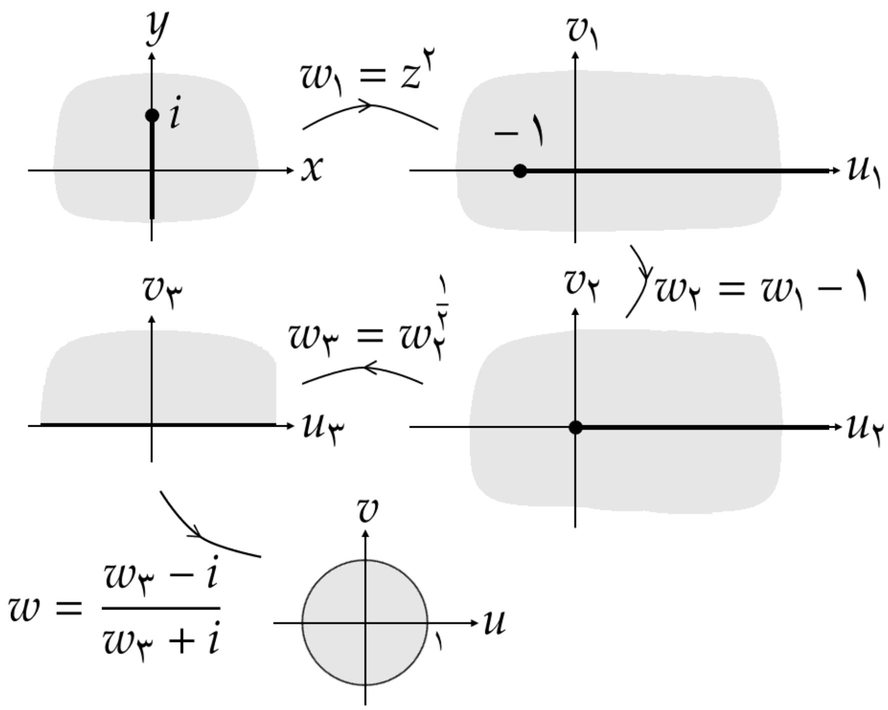
حل. کافی است شکل ۳.۵۷ را ببینید. دقت کنید که زاویه بین دو خط تصویر قائمه است و همچنین $w_\text{۱} = i \mapsto z = i$ و $w_\text{۱} = -\text{۱} \mapsto z = \circ$.

مثال ۳.۳۲. میدان $\{y > \circ\} - \{x = \circ,\ \circ < y < \text{۱}\}$ را به‌صورت ۱ – ۱ و پوشا بر دیسک واحد بنگارید.

حل. کافی است شکل ۳.۵۸ را ببینید.

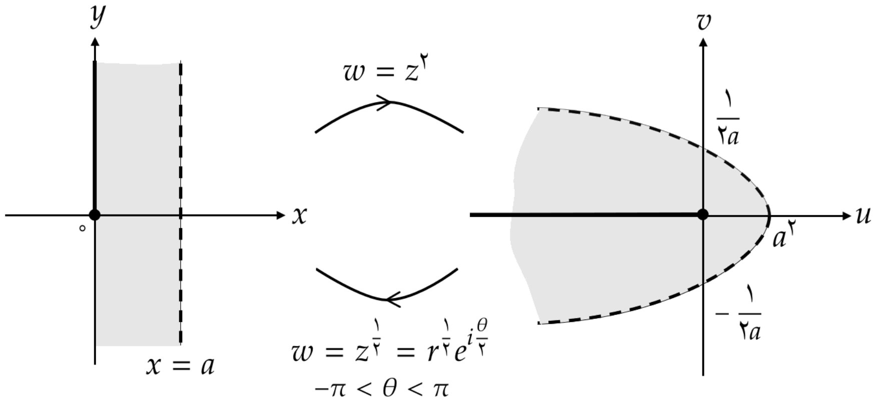


شکل ۵۷.۳



شکل ۵۸.۳

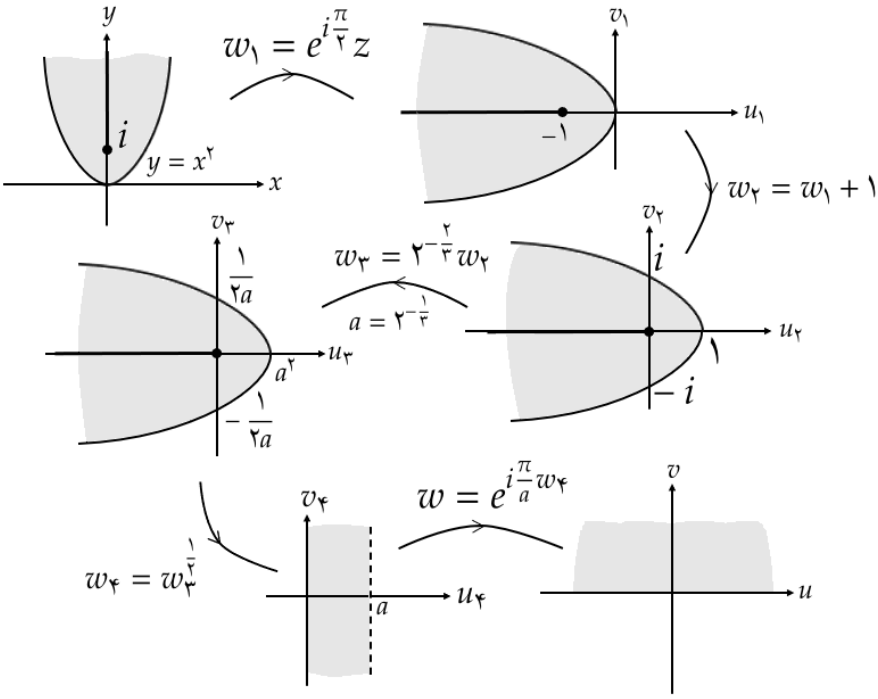
۴. نگاشت $w = z^۲$ خط $x = a > \circ$ را بر سهمی $v = ۲xy\Big|_{x=a}$ و $u = x^۲ - y^۲\Big|_{x=a}$ یا $u = a^۲ - \frac{v^۲}{۴a^۲}$ می‌نگارد. پس نگاشت معکوس آن یعنی $w = z^{\frac{۱}{۲}} = r^{\frac{۱}{۲}} e^{i\frac{\theta}{۲}}$ به‌طوری‌که $-\pi < \theta < \pi$، به‌صورت عکس عمل می‌کند. شکل ۵۹.۳ را ببینید.



شکل ۵۹.۳

مثال ۳۳.۳. میدان $\{y > x^{۲}\} - \{x = \circ, y > ۱\}$ را به‌صورت ۱ − ۱ و پوشا و همدیس بر نیم‌صفحه بالایی بنگارید.

حل. کافی است شکل ۶۰.۳ را ببینید.



شکل ۶۰.۳

حل معادله پوآسن روی میدان‌های "بد" با تبدیل مسئله بر روی یک میدان خوب با استفاده از نگاشت‌های همدیس مقدور می‌گردد. دو خاصیت زیر در این مورد مفیداند. این خاصیت‌ها در بخش توابع تحلیلی بیان شده‌اند.

خاصیت ۱۴.۳. قسمت حقیقی و قسمت موهومی هر تابع تحلیلی یک تابع همساز یا جواب معادله لاپلاس است.

خاصیت ۱۵.۳. ترکیب یک تابع همساز و یک تابع تحلیلی یک تابع همساز است. از اثبات این خاصیت، خاصیت زیر به‌دست می‌آید.

خاصیت ۱۶.۳. معادله پوآسن $T_{uu}+T_{vv}=g(u,v)$ با تغییر متغیرهای $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ که در اینجا $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ یک تابع تحلیلی است به معادله پوآسن زیر تبدیل می‌شود:

$$T_{xx}+T_{yy}=\left|f'(z)\right|^{۲} g(u(x,y),v(x,y))$$

مثال ۳۴.۳ (برای خاصیت ۱۴.۳). مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned}
&T_{xx}+T_{yy}=۰, \qquad && y>۰,\ -\infty<x<\infty\\
&T\big|_{x>۰,y=۰}=T_۰, \quad && T\big|_{x<۰,y=۰}=T_۱,
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $T_۰$ و $T_۱$ مقادیر ثابت هستند.

حل. تابع $T(r,\theta)=A\theta+B$ یک تابع همساز است. پس کافی است A و B را طوری تعیین کنیم تا

$$T\big|_{\theta=۰}=T_۰, \quad T\big|_{\theta=\pi}=T_۱.$$

در نتیجه باید

$$\begin{aligned}
&T=A\theta+B\big|_{\theta=۰}=B=T_۰ \quad \Rightarrow \quad B=T_۰\\
&T=A\theta+B\big|_{\theta=\pi}=A\pi+B=T_۱ \quad \Rightarrow \quad A\pi+T_۰=T_۱\\
&\quad \Rightarrow \quad A=\frac{T_۱-T_۰}{\pi}.
\end{aligned}$$

پس

$$T(x,y)=\frac{T_1-T_0}{\pi}\theta+T_0=\frac{T_1-T_0}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}+T_0.$$

مثال ۳.۳۵. مطلوبست حل مسئله زیر

$$T_{xx}+T_{yy}=0,\qquad 1<r<2$$
$$T\big|_{r=1}=T_0,\quad T\big|_{r=2}=T_1,$$

به‌طوری‌که T_0 و T_1 مقادیر ثابت هستند.

حل. تابع $T(r,\theta)=A\ln r+B$ یک تابع همساز است. کافی است A و B را طوری تعیین کنیم تا شرایط مرزی برقرار باشد. یعنی

$$T\big|_{r=1}=B=T_0,\quad T\big|_{r=2}=A\ln 2+B=T_1$$
$$\Rightarrow\quad A\ln 2+T_0=T_1\quad\Rightarrow\quad A=\frac{T_1-T_0}{\ln 2}.$$

پس

$$T(x,y)=\frac{T_1-T_0}{\ln 2}\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+T_0.$$

تمرین ۳.۵

۱. آ) تصویر ناحیه $y>1-x^2$ را تحت نگاشت $w=(1-i)\frac{1}{z+1}+2-i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ب) تصویر ناحیه $x<0$ و $x^2-y^2>1$ را تحت نگاشت $w=(1+i)\frac{1}{z+1}+2+i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ج) تصویر ناحیه $x=y^2$ را تحت نگاشت $w=(1+i)\frac{1}{z-1}+2-i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

د) تصویر ناحیه $|y| < 1$، $-2 < x < -1$ را تحت نگاشت $w = (1-i)\frac{1}{z+1} + 2 + i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ه) تصویر ناحیه $|z-2| < 1$ را تحت نگاشت $w = (1+i)\frac{1}{z+1} + 2 + i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

و) تصویر ناحیه $x + 2y > 3$، $y > 0$ را تحت نگاشت $w = (1+i)\frac{1}{z-1} + 2i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ز) تصویر ناحیه $y > 1 + x^2$ را تحت نگاشت $w = (1-i)\frac{1}{z-1} + 2 + i$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

۲. آ) تصویر ناحیه $2x + 3y < 1$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ب) تصویر ناحیه $|z| > 1$، $|\mathrm{Arg}\, z| < \frac{\pi}{4}$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ج) تصویر ناحیه $x^2 - y^2 > 1$، $x > 0$، $y > 0$ را تحت نگاشت $w = z^2$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

د) تصویر ناحیه $x + y > 1$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

ه) تصویر ناحیه $x^2 - y^2 < 1$، $x > 0$، $y > 0$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

و) تصویر ناحیه $0 < y < \frac{\pi}{2}$، $1 < x < 2$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به‌دست آورید و در صفحه w آن را ترسیم کنید.

۳. آ) تبدیل میبوسی را بیابید که سه نقطه 1، i، ∞ را به‌ترتیب بر i، -1، $1+i$ بنگارد.

ب) تبدیل میبوسی را بیابید که سه نقطه i، -1، $1+i$ را به‌ترتیب بر ∞، 2، $1-i$ بنگارد.

ج) تبدیل میبوسی را بیابید که سه نقطه 1، $-i$، ∞ را به‌ترتیب بر 2، $1-i$، ∞ بنگارد.

۴. آ) میدان $1 < y < x$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

ب) میدان $|z-2i|<2$ و $|z-2|<2$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

ج) میدان $|z-2|<2$ و $x>2$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

د) میدان $x<y$ و $|z|<1$ را به‌صورت یک‌به‌یک و پوشا و همدیس بر دیسک واحد بنگارید.

۵. آ) معادله لاپلاس $T_{xx}+T_{yy}=0$ را روی میدان $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=\cos\theta$ حل کنید.

ب) معادله لاپلاس $T_{xx}+T_{yy}=0$ را روی میدان $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ تحت شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=\sin\theta+\frac{1}{2}$ حل کنید.

ج) معادله لاپلاس $T_{xx}+T_{yy}=0$ را روی میدان $-\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=\sin\theta+\cos\theta$ حل کنید.

د) معادله لاپلاس $T_{xx}+T_{yy}=0$ را روی میدان $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{3}$ تحت شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=\sin\theta-\cos\theta$ حل کنید.

۶. آ) مسئله پوآسن $T_{xx}+T_{yy}=2e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$ و شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=e^{-xy}$ حل کنید.

ب) مسئله پوآسن $T_{xx}+T_{yy}=2e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ و شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=e^{-x^2-y^2}$ حل کنید.

ج) مسئله پوآسن $T_{xx}+T_{yy}=e^{-xy}$ را روی میدان $-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}$ و شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=e^{-y^2x^2}$ حل کنید.

د) مسئله پوآسن $T_{xx}+T_{yy}=\frac{1}{1+x^2y^2}$ را روی میدان $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$ و شرط مرزی $T\big|_{\text{روی مرز}}=-\frac{1}{1+x^2+y^2}$ حل کنید.

مراجع

[۱] حصارکی، محمود، و پورنکی، محمدرضا، توابع مختلط، چاپ فاطمی، ۱۳۸۹.

[2] Brown, James Ward, and Ruel Vance Churchill., *Complex variables and applications*, Boston: McGraw-Hill Higher Education, 2009.