قسمت اوّل جزوهٔ درس ریاضی مهندسی

(مشتقات پاره‌ای)

نیم‌سال اوّل ۱۴۰۰

فهرست مطالب

توضیحات در مورد این جزوه

مطالب این جزوه از روی کتاب [۱] آماده شده است.

مطالبی که در قسمت اوّل درس ریاضی مهندسی (مشتقات پاره‌ای) تدریس خواهد شد، عبارت‌اند از:

- بخش‌های ۱.۱، ۲.۱، ۳.۱، ۴.۱، ۵.۱، ۶.۱، ۷.۱ و ۸.۱ از فصل ۱ این جزوه.
- بخش‌های ۱.۲ و ۲.۲ از فصل ۲ این جزوه.

فصل ۱

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان کرانه‌دار

اندکی بعد از پیدایش قانون حرکت نیوتن، معادله حرکت تار مرتعش توسط دالامبر نوشته شد و با روش ابداعی او حل شد. با ظهور به‌کارگیری نیروی بخار، معادله انتقال حرارت توسط فوریه نوشته شد. حل این معادله با استفاده از روش دالامبر مقدور نشد. برای حل این معادله فوریه سری‌هایی با پایه‌های توابع سینوس و کسینوس معرفی نمود که علاوه بر حل معادله انتقال حرارت حل معادله تار مرتعش و پوسته مرتعش را نیز ممکن می‌نمود. با تعمیم‌هایی که بعدها بر روی این ابزار حل انجام شد حل خانواده وسیعی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ممکن گردید. هدف از این فصل معرفی سری فوریه و تعمیم‌های آن و استفاده از آنها برای حل معادلات پاره‌ای است.

در بخش ۱.۱ به‌معرفی سری فوریه و نحوه محاسبه آن می‌پردازیم. در بخش ۲.۱ به محاسبه سری فوریه توابع زوج و فرد می‌پردازیم. در بخش‌های بعدی تعمیم‌های سری فوریه و استفاده‌هایی از آن را داریم.

۱.۱ سری فوریه

هدف از این بخش معرفی سری فوریه و محاسبه آن است. قبل از شروع به انجام این کار به یادآوری مطالب مورد نیاز می‌پردازیم.

تابع تناوبی: تابع $f(x)$ با دامنه $\mathbb{R}$ را تناوبی با دوره تناوب $T > 0$ گوییم اگر برای کلیه مقادیر x داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$. توجه کنید که اگر $T > 0$ دوره تناوب f باشد در این صورت $2T$، $3T$، $\cdots$، nT برای هر عدد طبیعی n نیز یک دوره تناوب است.

مثال ۱.۱. تابع $f(x) = \sin x$ تناوبی با دوره‌های تناوب 2π، 4π، $\cdots$، $2n\pi$ است.

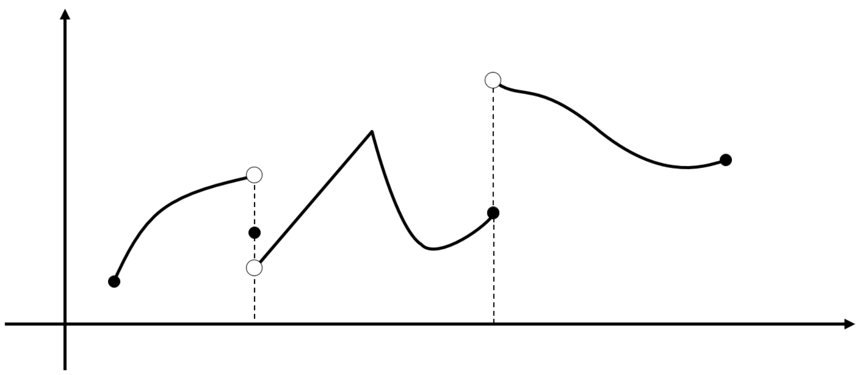
تعریف ۱.۱. کوچک‌ترین دوره تناوب را، در صورت وجود دوره تناوب اولیه گویند.

مثال ۲.۱. تابع $f(x) = \sin x$ دارای دوره تناوب اولیه 2π و تابع $g(x) = 5$ فاقد دوره تناوب اولیه است چون هر عدد مثبت یک دوره تناوب آن است.

تذکر. تعریف تابع تناوبی فوق با تعریف تابع تناوبی استاندارد متفاوت است. طبق آن تعریف تابع ثابت تناوبی نیست و کوچک‌ترین دوره تناوب، دوره تناوب تابع منظور می‌گردد. علت این امر این است که با مفهوم فوق، مجموعه توابع تناوبی با دوره تناوب T یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. این فضای برداری به درک اهمیت سری فوریه و کاربرد آن کمک می‌کند.

مفهوم مورد نیاز دیگر در تعریف زیر می‌آید.

تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته: تابع $g(x)$ را قطعه‌به‌قطعه پیوسته گوییم اگر نقاط ناپیوستگی آن از نوع جهشی باشد. یعنی حد چپ و راست در این نقاط موجود و متناهی ولی متفاوت باشد. به‌علاوه در هر بازه بسته و کرانه‌دار تعداد آنها متناهی باشد. (به‌شکل ۱.۱ توجه کنید.)



شکل ۱.۱: تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته

سری فوریه: سری فوریه ابزاری برای نوشتن توابع متناوب بر حسب سینوس‌ها و کسینوس‌ها است.

به‌عبارت دقیق‌تر اگر $f(x)$ یک تابع تناوبی و قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دوره تناوب $T = ۲p > ۰$ باشد و دنباله‌های $\{a_n\}_{n=۰}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه داشته باشیم:

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right).$$

سری فوق را سری فوریه تابع $f(x)$ گویند.

تذکر. تساوی بین تابع و سری فوریه آن، تساوی نقطه‌وار به‌جز احتمالاً در تعدادی متناهی نقطه خواهد بود.

توجه کنید برای تعیین سری فوریه می‌بایستی a_nها و b_nها را محاسبه کنیم.

محاسبه $a_۰$: از طرفین سری فوریه از ۰ تا $۲p$ انتگرال بگیرید. (با فرض تعویض $\sum$ و $\int$ که برای سری فوریه همیشه مقدور است) به‌دست آورید:

$$a_۰ = \frac{۱}{p}\int_۰^{۲p} f(x)\,dx.$$

محاسبه a_n: طرفین سری فوریه را در $\cos\frac{m\pi x}{p}$، $m \neq ۰$ ثابت ضرب و از ۰ تا $۲p$ انتگرال بگیرید. با توجه به اتحادهای مثلثاتی

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{۱}{۲}\Big[\cos(A-B) + \cos(A+B)\Big]$$
$$\sin A \cdot \cos B = \frac{۱}{۲}\Big[\sin(A-B) + \sin(A+B)\Big]$$

به‌دست می‌آورید:

$$a_m = \frac{۱}{p}\int_۰^{۲p} f(x)\cos\frac{m\pi x}{p}\,dx.$$

تذکر. توجه کنید این فرمول a_m فرمول $a_۰$ را نیز دربر دارد، لیکن برای محاسبه $a_۰$ می‌بایستی ابتدا قرار دهیم $m = ۰$ و سپس به محاسبه اقدام کنیم.

محاسبه b_n: از ضرب طرفین سری فوریه در $\sin\frac{m\pi x}{p}$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا $2p$، با توجه به فرمول‌های مثلثاتی فوق و

$$\sin A\cdot\sin B=\frac{1}{2}\Big[\cos(A-B)-\cos(A+B)\Big]$$

به‌دست می‌آید:

$$b_m=\frac{1}{p}\int_0^{2p}f(x)\sin\frac{m\pi x}{p}\,dx.$$

فرمول‌های a_n و b_n فوق را فرمول‌های اولر فوریه گویند. همچنین a_nها و b_nها را ضرایب فوریه گویند.

مثال ۱.۳. سری فوریه تابع $f(x)=x,\ 0\leq x\leq 2\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را به‌دست آورید.

حل. کافیست ضرایب فوریه را محاسبه کنیم. از $2p=2\pi$ داریم $p=\pi$.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{x^2}{2\pi}\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\Big]=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\Big]=-\frac{2}{n}$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx.$$

توجه کنید در نقطه $x=\pi$ به‌دست می‌آوریم $\pi=\pi$. در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ به‌دست می‌آوریم $\frac{\pi}{2}=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$ یا

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}.$$

برای $x=0$ داریم $f(x)=0$ لیکن مقدار سری فوریه برابر π است. پس در نقاط ناپیوستگی تساوی برقرار نیست.

حال به‌بیان شرایط فوریه برای سری فوریه می‌پردازیم.

خاصیت ۱.۱. اگر f و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دوره تناوب $2p > 0$ باشد آن‌گاه سری فوریه f موجود و ضرایب آن از فرمول‌های اولر-فوریه قابل حصول است. در نقاط پیوستگی f مقدار سری برابر با مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی مقدار سری برابر با میانگین حد چپ و راست است. به‌عبارت دقیق‌تر می‌توان نوشت:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right).$$

مثال ۴.۱. سری فوریه تابع $f(x) = (x-1)^2,\ 0 \le x \le 2$ و $f(x+2) = f(x)$ را به‌دست آورید.

حل. $2p = 2$. پس $p = 1$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{1}\int_0^2 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\\
a_n &= \frac{1}{1}\int_0^2 (x-1)^2 \cos n\pi x\,dx\\
&= (x-1)^2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^2 - \int_0^2 2(x-1)\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\\
&= -2\left[(x-1)\,\frac{\cos n\pi x}{-n^2\pi^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\cos n\pi x}{-n^2\pi^2}\,dx\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{1}\int_0^2 (x-1)^2 \sin n\pi x\,dx\\
&= -(x-1)^2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^2 + \int_0^2 2(x-1)\,\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\,dx\\
&= 2(x-1)\,\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^2 - \int_0^2 2\,\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\,dx = 0.
\end{aligned}$$

تذکر. $b_n = 0$ بدون محاسبه قابل تشخیص است. چون $f(x)$ فوق تابعی زوج است.

بدین ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

برای $x = 0$ به‌دست می‌آوریم $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ و برای $x = 1$، $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

تذکر. ۱) سری فوریه مستقل از انتخاب دوره تناوب است.

۲) اگر f پیوسته و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد درجه n در مخرج کسر a_n و b_n دوتا بیشتر از درجه صورت است. همچنین اگر f و f' تا مشتق mام پیوسته و مشتق $m+1$ آن ناپیوسته باشد درجه مخرج $m+2$ تا بیشتر از درجه صورت است. عکس این مطلب نیز صحت دارد.

۳) یکی از کاربردهای سری فوریه محاسبه سری‌های عددی است.

تمرین ۱.۱

۱. مجموعه دوره تناوب هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

آ) $\sin nx \cos 2mx$ ب) $\sin n\pi x \cos m\pi x$

۲. نشان دهید مجموعه توابع تناوبی با دوره T یک فضای برداری است.

۳. نشان دهید سری فوریه مستقل از انتخاب دوره تناوب است.

۴. نشان دهید اگر f پیوسته و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد آن‌گاه درجه n مخرج کسر a_n و b_n دوتا بیشتر از درجه صورت کسر است.

۵. نشان دهید اگر درجه n در مخرج a_n و b_n حداقل $m+2$ تا بیشتر از درجه صورت باشد آن‌گاه f تا مشتق mام آن پیوسته است.

۶. با استفاده از سری فوریه $f(x)=x^2$ روی $|x|<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ مقادیر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ را محاسبه کنید.

۷. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x)=|\cos x|$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ را محاسبه کنید.

۸. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = |x|^{3}, |x| \leq 2$ و $f(x+4) = f(x)$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{4}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4}}$ را محاسبه کنید.

۹. با استفاده از سری فوریه تابع $f(x) = x(1-|x|), |x| \leq 1$ و $f(x+2) = f(x)$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)^{3}}$ را محاسبه کنید.

۱۰. مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{6}}$ را با استفاده از سری فوریه مناسب محاسبه کنید.

۲.۱ سری فوریه توابع زوج و فرد

برای توابع زوج و فرد محاسبه سری فوریه ساده‌تر محاسبه می‌گردد. علت این امر صفر بودن انتگرال تابع فرد روی دامنه قرینه است. در ابتدا به یادآوری مفاهیم و خواصی از توابع زوج و فرد می‌پردازیم.

تابع $g(x)$ را زوج گوییم اگر دامنه آن قرینه و $g(-x) = g(x)$.

تابع $h(x)$ را فرد گوییم اگر دامنه آن قرینه و $h(-x) = -h(x)$.

خاصیت ۲.۱. ۱) حاصل‌ضرب دو تابع زوج یک تابع زوج است.

۲) حاصل‌ضرب دو تابع فرد نیز یک تابع زوج است.

۳) حاصل‌ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد یک تابع فرد است.

۴) اگر h فرد باشد آن‌گاه $\int_{-a}^{a} h(x)\,dx = 0$.

۵) اگر g زوج باشد آن‌گاه $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$.

مطلب مورد نیاز دیگر برای محاسبه سری فوریه توابع زوج و فرد خاصیت زیر است.

خاصیت ۳.۱. اگر $f(x)$ تابع تناوبی با دوره تناوب T باشد آن‌گاه برای هر عدد حقیقی d داریم:

$$\int_{d}^{d+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

علت. با توجه به خواص انتگرال داریم:

$$\int_d^{d+T} f(x)\,dx = \int_d^{\circ} f(x)\,dx + \int_{\circ}^{T} f(x)\,dx + \int_T^{T+d} f(x)\,dx.$$

از طرف دیگر با توجه به تناوبی بودن f و تغییر متغیر $x = t + T$ داریم:

$$\int_T^{T+d} f(x)\,dx = \int_{\circ}^{d} f(t+T)\,dt = \int_{\circ}^{d} f(t)\,dt.$$

پس $\int_d^{d+T} f(x)\,dx = \int_{\circ}^{T} f(x)\,dx$.

نتیجه ۱.۴. فرمول‌های اولر-فوریه به‌صورت زیر نیز قابل نمایش است.

$$a_n = \frac{۱}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$
$$b_n = \frac{۱}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

با توجه به این‌که سینوس تابعی فرد و کسینوس تابعی زوج است، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۱.۵. ۱) اگر $g(x)$ زوج و با دورهٔ تناوب $۲p$ باشد، آن‌گاه

$$a_n = \frac{۲}{p}\int_{\circ}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx \quad , \quad b_n = \circ$$
$$g(x) = \frac{a_{\circ}}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p}.$$

۲) اگر $h(x)$ تابعی فرد با دورهٔ تناوب $۲p$ باشد، آن‌گاه

$$a_n = \circ \quad , \quad b_n = \frac{۲}{p}\int_{\circ}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$
$$h(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}.$$

تذکر. با توجه به این خاصیت می‌گویند سری فوریه تابع فرد سینوسی و سری فوریه تابع زوج کسینوسی است.

مثال ۱.۵. سری فوریه تابع $f(x) = x|x|, |x| < \pi$ و $f(x+۲\pi) = f(x)$ را محاسبه کنید.

حل. این تابع فرد است. پس $a_n = ۰$ و $۲p = ۲\pi$ یا $p = \pi$ و

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi} x^۲ \sin nx\, dx = \frac{۲}{\pi}\Big[x^۲\frac{\cos nx}{-n}\Big|_۰^{\pi} - \int_۰^{\pi} ۲x\frac{\cos nx}{-n}dx\Big] \\ &= \frac{۲\pi}{n}(-۱)^{n+۱} + \frac{۴}{\pi}\Big[x\frac{\sin nx}{n^۲}\Big|_۰^{\pi} - \int_۰^{\pi}\frac{\sin nx}{n^۲}dx\Big] \\ &= \frac{۲\pi}{n}(-۱)^{n+۱} + \frac{۴}{\pi n^۳}\big[(-۱)^n - ۱\big]. \end{aligned}$$

پس

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty}\Big\{\frac{۲\pi}{n}(-۱)^{n+۱} + \frac{۴}{\pi n^۳}\big[(-۱)^n-۱\big]\Big\}\sin nx.$$

برای $x = \frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\frac{\pi^۲}{۴} = ۲\pi\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{۲k+۱} - \frac{۸}{\pi}\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)^۳}.$$

همچنین با استفاده از سری فوریه $f(x) = x,\ |x| \leq \pi$، $f(x+۲\pi) = f(x)$ به‌دست می‌آوریم $\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{۲k+۱} = \frac{\pi}{۴}$. بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)^۳} = \frac{\pi^۳}{۳۲}.$$

با استفاده از تساوی پارسیوال محاسبه سری‌های عددی بیشتری مقدور است این خاصیت را به‌صورت زیر داریم.

خاصیت ۶.۱. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ با دوره‌های تناوبی $۲p$ دارای سری‌های زیراند.

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\Big)$$

$$g(x) = \frac{c_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\Big(c_n\cos\frac{n\pi x}{p} + d_n\sin\frac{n\pi x}{p}\Big)$$

آن‌گاه

$$\frac{a_۰c_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}(a_nc_n + b_nd_n) = \frac{۱}{p}\int_{-p}^{p} f(x)g(x)\,dx.$$

علت. طرفین سری فوریه $f(x)$ را در $g(x)/p$ ضرب و از $-p$ تا p انتگرال بگیرید. با تعویض محل $\sum$ و $\int$ انتگرال‌های حاصل، c_n و d_n را به‌دست می‌دهند.

مثال ۱.۶. برای دو تابع $f(x) = x, |x| < \pi$ و $g(x) = x^3$ با دوره تناوب 2π سری‌های سینوسی زیر به‌دست می‌آید.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{12(-1)^n}{n^3}\Big] \sin nx.$$

با استفاده از تساوی پارسیوال به‌دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\Big[\frac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{12(-1)^n}{n^3}\Big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^4}{5}$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{12}\Big[-\frac{\pi^4}{5} + 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big]$$
$$= \frac{1}{12}\Big[-\frac{\pi^4}{5} + 2\pi^2\frac{\pi^2}{6}\Big] = \frac{\pi^4}{90}.$$

هر یک از دو سری فوریه سینوسی و کسینوسی خاصیت مخصوص به‌خود را دارند که آنها را ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌سازد. این خواص را در این‌جا بیان می‌کنیم.

خاصیت ۱.۷. ۱) دنباله $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_1 = \Big\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \text{فرد و تناوبی با دوره تناوب } f \ 2p>0\text{، } f(mp)=0\text{،}$$
$$f \text{ پیوسته در نقاط } x=mp\text{، } m\in\mathbb{Z}\text{، و } f \text{ و } f' \text{ قطعه‌به‌قطعه پیوسته} \Big\}$$

۲) دنباله $\left\{\cos\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_2 = \Big\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : \quad f \text{ تناوبی با دوره تناوب } 2p>0\text{، } f \text{ زوج و پیوسته، } f'$$
$$\text{قطعه‌به‌قطعه پیوسته، } f' \text{ در } x=mp \text{ پیوسته و } f'(mp)=0\text{، } m\in\mathbb{Z} \Big\}$$

علت. ۱) طبق خاصیت ۱.۱، اگر $f \in V_1$ باشد سری فوریه f موجود است. چون f فرد است پس سری فوریه آن سینوسی است. یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \quad , \quad b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx.$$

چون f در نقاط $x = mp$ پیوسته است پس تساوی سری فوریه در این نقاط برقرار است.

۲) چون f پیوسته و زوج و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته است پس:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \quad , \quad a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx.$$

چون درجه در مخرج کسر a_n دوتا بیشتر از درجه صورت است پس این سری همگرای یکنواخت و در نتیجه از آن می‌توان جمله‌به‌جمله مشتق گرفت و به‌دست آورد:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n\pi}{p} a_n \sin \frac{n\pi x}{p}.$$

چون f' در نقاط $x = mp$، پیوسته است پس در این نقاط مقدار سری فوریه f' برابر با خود تابع است یعنی شرط $f'(mp) = 0$ نیز برقرار است.

تذکر. ۱) اگر f، f' و f'' دارای دوره تناوب $2p > 0$، f پیوسته و f' و f'' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشند آن‌گاه سری فوریه f' از جمله‌به‌جمله مشتق‌گیری سری فوریه f قابل حصول است.

۲) اگر f و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دوره تناوب $2p > 0$ باشد آن‌گاه انتگرال معین f با جمله‌به‌جمله انتگرال‌گیری از سری فوریه f قابل حصول است.

تمرین ۲.۱

۱. تعیین کنید کدام یک از توابع زیر فرد و کدام یک زوج است.

آ) $x\sin x^{۲}$ ج) $e^{\cos x}$ ه) $x^{۳}+x^{۲}$

ب) $x^{۴}\ln|x|$ د) $\frac{x^{۳}}{۱+x^{۴}}$ و) $\ln|x|\tan x$

۲. با استفاده از سری فوریه $f(x)=x^{۲}, |x|\leq\pi$ مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۴}}$ را محاسبه کنید.

۳. با استفاده از سری فوریه $f(x)=\frac{\pi^{۲}}{۶}x-\frac{\pi}{۴}x^{۲}+\frac{۱}{۱۲}x^{۳}, |x|\leq\pi$ مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۶}}$ را بیابید.

۴. با استفاده از سری فوریه $f(x)=x^{۴}-x^{۲}, |x|\leq\pi$ مقدار $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۸}}$ را محاسبه کنید.

۵. نشان دهید:

$$\ln\left(۲\left|\sin\frac{x}{۲}\right|\right)=-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\cos nx,\quad x\neq ۲m\pi, m\in\mathbb{Z}$$

$$\ln\left(۲\left|\cos\frac{x}{۲}\right|\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\cos nx,\quad x\neq (۲m+۱)\pi, m\in\mathbb{Z}.$$

با استفاده از آن‌ها نشان دهید:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۳}}=\frac{-۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\ln\left(۲\left|\cos\frac{x}{۲}\right|\right)dx$$

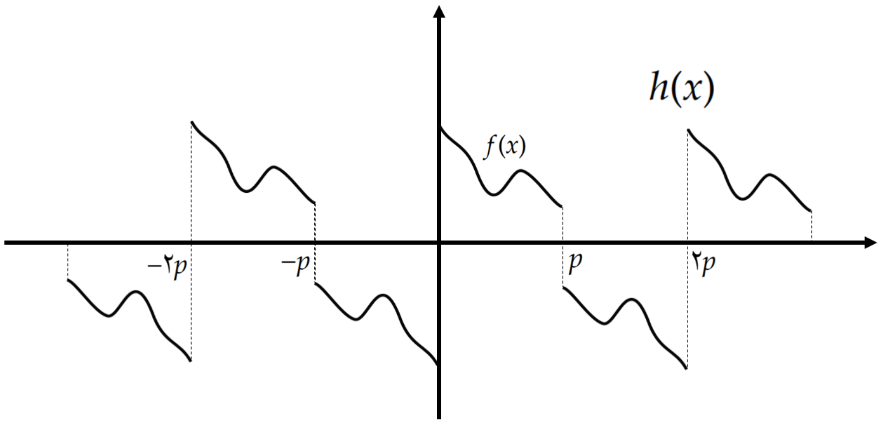
$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{n^{۳}}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\ln\left(۲\left|\sin\frac{x}{۲}\right|\right)dx$$

$$\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{(۲k+۱)^{۳}}=\frac{۱}{۴\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\ln\left(\left|\tan\frac{x}{۲}\right|\right)dx.$$

۳.۱ بسط در نیم دامنه

در کاربرد سری فوریه نیاز است تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته که فقط روی $[۰,p]$ تعریف شده را به‌صورت سری فوریه بنویسیم. دو طریق زیر با استفاده از سری فوریه سینوسی و کسینوسی مفید است.

طریقه ۱: تابع $f(x)$ را به‌صورت فرد و تناوبی با دوره تناوب $۲p>۰$ به‌صورت زیر بسط دهید. (به‌شکل ۲.۱ توجه کنید.)



شکل ۲.۱: گسترش فرد $f(x)$ در نیم دامنه $[۰,p]$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & ۰<x<p \\ -f(-x) & -p<x<۰ \end{cases}$$

$$h(x+۲p)=h(x).$$

تابع $h(x)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و تناوبی با دوره $۲p>۰$ و فرد است. پس

$$h(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \quad , \quad b_n=\frac{۲}{p}\int_۰^p h(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

روی بازه $[۰,p]$ داریم:

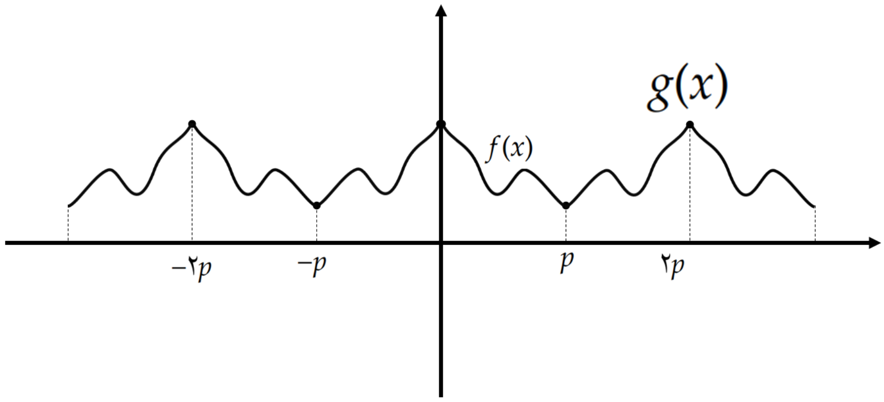
$$f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \quad , \quad b_n=\frac{۲}{p}\int_۰^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

این سری را بسط در نیم دامنه سینوسی f گوییم.

طریقه ۲: این بار تابع $f(x)$ را به‌صورت زوج و تناوبی با دوره تناوب $۲p>۰$ بسط دهید تا تابع $g(x)$ به‌دست آید. (به‌شکل ۳.۱ توجه کنید.)

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & ۰<x<p \\ f(-x) & -p<x<۰ \end{cases}$$

$$g(x+۲p)=g(x).$$



شکل ۳.۱: گسترش زوج $f(x)$ در نیم دامنه $[۰,p]$

این تابع دارای سری فوریه کسینوسی است.

$$g(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{p}\quad,\quad a_n=\frac{۲}{p}\int_۰^p h(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx.$$

روی بازه $[۰,p]$ داریم:

$$f(x)=\frac{a_۰}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{p}\quad,\quad a_n=\frac{۲}{p}\int_۰^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx$$

این سری را بسط در نیم دامنه کسینوسی $f(x)$ گویند.

مثال ۷.۱. بسط در نیم دامنه سینوسی و کسینوسی $f(x)=x,\ ۰\leq x\leq ۱$ را به‌دست آورید.

حل. ۱) سینوسی: داریم $p=۱$ و

$$b_n=۲\int_۰^۱ x\sin n\pi x\,dx=۲\Big(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_۰^۱+\frac{۱}{n\pi}\int_۰^۱\cos n\pi x\,dx\Big)$$
$$=\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}$$

پس

$$x=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin n\pi x,\qquad ۰\leq x\leq ۱.$$

تذکر. در $x=۰$ تساوی برقرار است چون در این نقطه $h(x)$، یعنی گسترش فرد آن پیوسته است. لیکن در $x=۱$ تساوی برقرار نیست چون $h(x)$ آن در این نقطه ناپیوسته است.

۲) کسینوسی: داریم $p=1$ و

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\int_0^1 x\,dx = 1 \\ a_n &= 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx = 2\Big(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx\Big) \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\big((-1)^n - 1\big) \end{aligned}$$

پس

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\big((-1)^n-1\big)\cos n\pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

با توجه به‌مطالب فوق و خاصیت ۷.۱، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۸.۱. ۱) دنبالهٔ $\left\{\sin \frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_3 = \left\{f:[0,p]\to\mathbb{R} : f(0)=f(p)=0 \text{ و } f' \text{ و } f \text{ قطعه‌به‌قطعه پیوسته}\right\}$$

۲) دنبالهٔ $\left\{\cos \frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_4 = \left\{f:[0,p]\to\mathbb{R} \ : \ f'' \text{ و } f' \text{ و } f \text{ پیوسته} \right.$$
$$\left. f'(0)=f'(p)=0 \text{ و قطعه‌به‌قطعه پیوسته} \right\}$$

تذکر. اهمیت اساسی خاصیت فوق برقراری تساوی بین تابع و سری فوریه آن در نقاط مرزی ۰ و p است.

اکنون امکانات حل بعضی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مهیا است. در این‌جا مثالی از انتقال حرارت را می‌آوریم.

مثال ۸.۱. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه–مرزی انتقال حرارت:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{xxt} - u = xt, & 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \end{cases}$$

اگرچه ما به‌دنبال حل این مسئله هستیم، لیکن خاصیت زیر که علت آن را در کتاب‌های پیشرفته معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌توان یافت و خاصیت مشابه آن برای کلیه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که در این فصل مطرح می‌گردد، برقرار است.

در تساوی اوّل، معادله دیفرانسیل پاره‌ای معرفی شده است. در تساوی دوم شرط اولیه یا وضعیت جواب مطلوب در $t = 0$ داده شده است. در تساوی‌های سوم شرایط مرزی یا وضعیت جواب مطلوب در دو انتهای بازه مکان داده شده است.

خاصیت ۹.۱. مسائل انتقال حرارت با معادلات خطی و ضرایب ثابت همراه با شرایط اولیه و مرزی دارای خواص زیراند.

۱) این‌گونه مسائل دارای جواب یگانه‌اند.

۲) این جواب نسبت به داده‌ها به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند.

۳) اگر ناهمواری در داده‌ها باشد این ناهمواری در بالاترین مشتق ظاهر می‌گردد و مشتقات مرتبه پایین‌تر هموار هستند.

حل. شرایط مرزی اولین مطلبی است که در حل معادلات پاره‌ای می‌بایستی برقرار شود. این‌کار با انتخاب پایه مناسب انجام می‌پذیرد. شرایط مرزی دیریکله همگن است، یعنی:

$$u\Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad u\Big|_{x=1} = 0.$$

با گرفتن $p = 1$ در پایه سینوسی جواب مسئله را بر حسب سری فوریه سینوسی به‌صورت زیر می‌توان در نظر گرفت. توجه کنید در این‌صورت شرایط مرزی برقرار است.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin n\pi x$$

این تابع در شرایط مرزی صدق می‌کند. حال می‌بایستی $T_n(t)$ها را طوری تعیین کنیم تا در معادله و شرط اولیه صدق کند. چون u مشتق‌پذیر است پس سری به‌طور یکنواخت همگرا است. به‌این ترتیب جای $\sum$ و مشتق قابل تعویض است. از قرار دادن آن در معادله و شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \dot{T}_n(t)\sin n\pi x - \sum_{n=۱}^{\infty} -n^۲\pi^۲ T_n(t)\sin n\pi x - \sum_{n=۱}^{\infty} -n^۲\pi^۲ \dot{T}_n(t)\sin n\pi x$$
$$- \sum_{n=۱}^{\infty} T_n(t)\sin n\pi x = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n t \sin n\pi x$$

و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} T_n(\circ)\sin n\pi x = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n \sin n\pi x$$

که در آنها

$$\begin{aligned} c_n &= ۲\int_\circ^۱ x \sin n\pi x\, dx = ۲x\frac{\cos n\pi x}{-n\pi}\Big|_\circ^۱ - \int_\circ^۱ ۲\frac{\cos n\pi x}{-n\pi}\,dx \\ &= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}. \end{aligned}$$

چون پایه کلیه سری‌های فوق $\left\{\sin n\pi x\right\}_{n=۱}^{\infty}$ است. پس بایستی تساوی بین ضرایب طرفین تساوی برقرار باشد. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} (۱+n^۲\pi^۲)\dot{T}_n(t) + (n^۲\pi^۲-۱)T_n(t) = c_n t \\ T_n(\circ) = c_n. \end{cases}$$

مسئله فوق یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اوّل خطی با ضرایب ثابت است. جواب عمومی معادله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$T_n(t) = A_n e^{\frac{۱-n^۲\pi^۲}{۱+n^۲\pi^۲}t} + \frac{c_n}{n^۲\pi^۲-۱}\left(t - \frac{۱+n^۲\pi^۲}{۱-n^۲\pi^۲}\right).$$

با اعمال شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم.

$$A_n = c_n\left(\frac{۱+n^۲\pi^۲}{(n^۲\pi^۲-۱)^۲}+۱\right)$$

به‌این‌ترتیب جواب مسئله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\left\{\left(\frac{۱+n^۲\pi^۲}{(n^۲\pi^۲-۱)^۲}+۱\right)e^{\frac{۱-n^۲\pi^۲}{۱+n^۲\pi^۲}t}+\frac{t-\frac{۱+n^۲\pi^۲}{۱-n^۲\pi^۲}}{n^۲\pi^۲-۱}\right\}\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\sin n\pi x.$$

مثال ۹.۱. مسئله با شرایط اولیه و مرزی تار مرتعش زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+u=xt, & ۰\leq x\leq \pi,\ t\geq ۰ \\ u(x,۰)=x, \quad u_t(x,۰)=۰, & \\ u_x(۰,t)=۰, \quad u_x(\pi,t)=۰ & \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی این مسئله نیومن همگن است. یعنی:

$$u_x\Big|_{x=۰}=۰ \quad , \quad u_x\Big|_{x=\pi}=۰.$$

هر یک از عناصر پایه کسینوسی با $p=\pi$، یعنی $\left\{\cos nx\right\}_{n=۰}^{\infty}$، در شرایط مرزی صدق می‌کند. پس انتظار می‌رود جواب این مسئله را بر حسب این پایه بتوان نوشت. پس می‌گیریم:

$$u(x,t)=\frac{T_۰(t)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}T_n(t)\cos nx$$

توجه کنید این $u(x,t)$ در شرایط مرزی همگن مسئله صدق می‌کند.

حال باید $T_n(t)$ها را طوری تعیین کنیم تا در معادله و شرایط اولیه صدق کنند. برای این منظور آن را در معادله و شرایط اولیه قرار می‌دهیم. ابتدا با جاگذاری در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\ddot{T}_۰(t)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\ddot{T}_n(t)\cos nx+\sum_{n=۱}^{\infty}n^۲T_n(t)\cos nx+\sum_{n=۱}^{\infty}n^۲\ddot{T}_n(t)\cos nx$$
$$+\frac{T_۰(t)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}T_n(t)\cos nx=\frac{c_۰t}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}c_nt\cos nx$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
c_\circ &= \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi x\,dx = \pi \\
c_n &= \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi x\cos nx\,dx = \frac{۲}{\pi}\Big[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_\circ^\pi - \int_\circ^\pi \frac{\sin nx}{n}\,dx\Big] \\
&= \frac{۲}{\pi n^۲}\big[(-۱)^n - ۱\big].
\end{aligned}
$$

چون در تساوی فوق کلیه سری‌ها بر حسب پایه $\{\cos nx\}_{n=\circ}^{\infty}$ است. پس باید

$$
\begin{cases}
\ddot{T}_\circ(t) + T_\circ(t) = c_\circ t \\
(۱+n^۲)\ddot{T}_n(t) + (۱+n^۲)T_n(t) = c_n t.
\end{cases}
$$

جواب عمومی این معادله‌ها را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$
T_n(t) = A_n\cos nt + B_n\sin nt + \frac{c_n}{۱+n^۲}t, \qquad n = \circ, ۱, ۲, \cdots
$$

حال در شرایط اولیه قرار می‌دهیم.

$$
\begin{aligned}
u(x,\circ) &= \frac{T_\circ(\circ)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} T_n(\circ)\cos nx = x = \frac{c_\circ}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n\cos nx \\
u_t(x,\circ) &= \frac{\dot{T}_\circ(\circ)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} \dot{T}_n(\circ)\cos nx = \circ
\end{aligned}
$$

پس باید

$$
\begin{cases}
T_n(\circ) = c_n & n = \circ, ۱, ۲, \cdots \\
\dot{T}_n(\circ) = \circ & n = \circ, ۱, ۲, \cdots
\end{cases}
$$

با اعمال این شرایط اولیه بر جواب عمومی $T_n(t)$ به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{cases}
T_\circ(\circ) = A_\circ = c_\circ \\
T_n(\circ) = A_n = c_n
\end{cases}
\quad , \quad
\begin{cases}
\dot{T}_\circ(\circ) = B_\circ + c_\circ = \circ \\
\dot{T}_n(\circ) = nB_n + \dfrac{c_n}{۱+n^۲} = \circ
\end{cases}
$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$A_{\circ} = c_{\circ} \quad , \quad B_{\circ} = -c_{\circ} \quad , \quad A_n = c_n \quad , \quad B_n = -\frac{c_n}{n(1+n^2)}$$

$$T_{\circ}(t) = c_{\circ}\cos t - c_{\circ}\sin t + c_{\circ}t$$

$$T_n(t) = c_n\cos nt - \frac{c_n \sin nt}{n(1+n^2)} + \frac{c_n}{1+n^2}t$$

در نتیجه جواب نهایی به‌صورت زیر است.

$$u(x,t) = \frac{c_{\circ}}{2}\Big(\cos t - \sin t + t\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\Big(\cos nt - \frac{\sin nt}{n(1+n^2)} + \frac{t}{1+n^2}\Big)\cos nx.$$

تذکر. در دو مثال فوق بعد از قرار دادن سری فوریه جواب کلیه سری‌ها بر حسب یک پایه ظاهر شده‌اند. علت این امر این است که مشتقات از مرتبه زوج سینوس و کسینوس از جنس خودشان است و در این معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x وجود نداشته است.

تذکر. ۱) پایه سینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی همگن دیریکله است مشروط بر این‌که در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

۲) پایه کسینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی همگن نیومن است مشروط بر این‌که در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

۳) چنان‌چه شرایط مرزی غیر همگن باشد ابتدا تابع $u_q(x,t)$ را طوری انتخاب کنید تا در شرایط مرزی غیر همگن صدق کند. سپس بگیرید:

$$u(x,t) = u_q(x,t) + v(x,t)$$

حال مسئله را با تابع مجهول جدید یعنی $v(x,t)$ بنویسید. در این‌صورت شرایط مرزی همگن است.

۴) برای $u_q(x,t)$ بینهایت انتخاب وجود دارد. بهتر آن‌ها به‌صورت زیر است.

آ) برای شرایط مرزی دیریکله بگیرید $u_q(x,t) = A(t)x + B(t)$ و $A(t)$ و $B(t)$ را طوری انتخاب کنید تا شرایط مرزی غیر همگن برقرار شود.

ب) برای شرایط مرزی نیومن بگیرید $u_q(x,t) = A(t)x^۲ + B(t)x$ و $A(t)$ و $B(t)$ را طوری تعیین کنید تا شرایط مرزی غیر همگن برقرار شود.

مثال ۱۰.۱. مسئله با شرایط مرزی غیر همگن زیر را به مسئله با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = xt, & \circ \leq x \leq ۱, t \geq \circ \\ u(x,\circ) = x, \quad u_t(x,\circ) = ۲, & \\ u(\circ,t) = t, \quad u(۱,t) = ۱ & \end{cases}$$

حل. ابتدا $u_q(x,t)$ را تعیین می‌کنیم. شرایط مرزی دیریکله است.

$$u_q(x,t) = Ax + B$$
$$u_q(\circ,t) = B = t \quad , \quad u_q(۱,t) = A + B = ۲$$

پس $B = t$ و $u(x,t) = (۲-t)x + t + v(x,t)$ و آن را در مسئله قرار دهید تا مسئله را برای تابع مجهول $v(x,t)$ به‌صورت زیر به‌دست آورید.

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} + v = xt - (۲-t)x - t = ۲xt - t - ۲x, & \circ \leq x \leq ۱, t \geq \circ \\ v(x,\circ) = x - ۲x = -x, & \\ v_t(x,\circ) = ۲ + x - ۱ = x + ۱, & \\ v(\circ,t) = \circ, \quad v(۱,t) = \circ & \end{cases}$$

این مسئله دیگر با پایه سینوسی قابل حل است.

تذکر. ۱) اگر در معادله مشتق فرد ظاهر شده باشد یا شرایط مرزی غیر از دیریکله یا نیومن باشد پایه‌های فوق مفید نخواهد بود. برای این‌گونه مسائل می‌بایستی پایه مناسبی بسازیم. این کار تحت روش جداسازی و مسئله اشترم-لیوویل در آینده بررسی خواهد شد.

۲) از خود سری فوریه نیز به‌عنوان پایه استفاده می‌گردد. این پایه را در بخش بعدی معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱. جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای که فقط در شرایط مرزی صدق کند را جواب عمومی مسئله گوییم.

تذکر. جواب عمومی مذکور حاوی ثابت‌هایی است که با اعمال شرایط اولیه مشخص و جواب یگانه مسئله به‌دست می‌آید.

مثال ۱۱.۱. برای مثال ۸.۱ جواب عمومی به‌صورت زیر است:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{\frac{1-n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}t}+\frac{2(-1)^{n+1}}{n(n^2\pi^2-1)}\left(t-\frac{1+n^2\pi^2}{1-n^2\pi^2}\right)\right]\sin n\pi x$$

در این‌جا A_nها همان ثابت‌ها هستند که با اعمال شرط اولیه تعیین شده‌اند.

همچنین برای مثال ۹.۱ جواب عمومی عبارت است از

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2}\left(A_0\cos t+B_0\sin t+\pi t\right)\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos nt+B_n\sin nt+\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2(1+n^2)}t\right\}\cos nx\end{aligned}$$

در این‌جا A_nها و B_nها همان ثابت هستند که با اعمال شرایط اولیه تعیین شده‌اند.

تمرین ۳.۱

جواب عمومی معادلات همراه با شرایط مرزی زیر را به‌دست آورید.

۱. $u_{tt}-2u_t-u_{xx}=xt, \qquad 0\leq x\leq \pi,\ t\geq 0$

$u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0$

۲. $u_t-4u_{xx}=x^2t, \qquad 0\leq x\leq 1,\ t\geq 0$

$u_x(0,t)=t, \quad u_x(1,t)=1+t$

۳. $u_{tt}+u_{xxxx}=xt, \qquad 0\leq x\leq \pi,\ t\geq 0$

$u_x(0,t)=0, \quad u_x(\pi,t)=1+t, \quad u_{xxx}(0,t)=0, \quad u_{xxx}(\pi,t)=0$

مسائل با شرایط اولیه و مرزی زیر را حل کنید.

۴. $u_t - ۴u_{xxt} - u_{xx} + u = x^۲ t, \qquad ۰ \le x \le ۱,\ t \ge ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_x(۰,t) = t, \quad u_x(۱,t) = ۰$

۵. $u_{tt} - ۴u_{xxt} - u_{xx} + u = x^۲ t, \qquad ۰ \le x \le ۱,\ t \ge ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = x^۲, \quad u(۰,t) = t, \quad u(۱,t) = ۱$

۶. $u_{tt} + u_{xxxx} - ۲u_{xxtt} + ۴u = xt, \qquad ۰ \le x \le ۱,\ t \ge ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = ۰,$

$u(۰,t) = t, \quad u(۱,t) = ۰, \quad u_{xx}(۰,t) = ۰, \quad u_{xx}(۱,t) = t$

۴.۱ سری فوریه مختلط

یکی از کاربردهای اعداد مختلط ساده محاسبه کردن محاسبات حقیقی و فشرده‌سازی فرمول‌های مهم است. هدف از این بخش این است که با استفاده از اعداد مختلط فرمول فشرده‌ای برای سری فوریه به‌دست آوریم. خواهیم دید که محاسبه ضرایب فوریه نیز آسان‌تر می‌گردد. برای انجام این کار نیاز به مفاهیم نو است که ابتدا می‌آوریم.

تابع حقیقی-مختلط: تابع $f(t) = f_۱(t) + i f_۲(t)$ که در آن $t \in \mathbb{R}$ و $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ دو تابع حقیقی‌اند را یک تابع حقیقی-مختلط گوییم. با توجه به تعریف مشتق و انتگرال متغیر حقیقی، مانند بردارها، خاصیت زیر برقرار است.

خاصیت ۱۰.۱. برای تابع حقیقی-مختلط مشتق و انتگرال را به‌صورت زیر داریم.

$$f'(t) = f_۱'(t) + i f_۲'(t)$$
$$\int f(t)\,dt = \int f_۱(t)\,dt + i \int f_۲(t)\,dt$$

تذکر. کلیه قواعد و فرمول‌های مشتق و انتگرال تابع حقیقی برای این تابع، از جمله انتگرال‌گیری جزبه‌جزء برقرار است.

تابع نمائی موهومی: تابع حقیقی-مختلط $\cos t + i\sin t$ را تابع نمائی موهومی گوییم و با e^{it} نشان می‌دهیم. یعنی:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

تذکر. این تابع نمایی کلیه خواص تابع نمایی حقیقی را دارد. به‌خصوص

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it} \quad , \quad \int e^{it}\,dt = \frac{۱}{i}e^{it} + C.$$

همچنین برای $a, b, t \in \mathbb{R}$ می‌گیریم:

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}\cdot e^{ibt}.$$

این تابع نیز کلیه خواص تابع نمائی حقیقی را دارا است.

اکنون سری فوریه تابع تناوبی $f(x)$ با دوره تناوب $۲p > ۰$ را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p} + b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_n = \frac{۱}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx \quad , \quad b_n = \frac{۱}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx.$$

با توجه به مطالب فوق داریم:

$$e^{-it} = \cos t - i\sin t$$

در نتیجه

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{۲} \quad , \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{۲i}.$$

با قرار دادن این مقادیر سینوس و کسینوس در سری فوریه به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{a_n}{۲} + \frac{b_n}{۲i}\right)e^{\frac{in\pi x}{p}} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{a_n}{۲} - \frac{b_n}{۲i}\right)e^{-\frac{in\pi x}{p}} \\ &= \frac{a_۰}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{a_n}{۲} + \frac{b_n}{۲i}\right)e^{\frac{in\pi x}{p}} + \sum_{-n=۱}^{\infty}\left(\frac{a_{-n}}{۲} - \frac{b_{-n}}{۲i}\right)e^{\frac{in\pi x}{p}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}. \end{aligned}$$

که در آن

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n}{۲} + \frac{b_n}{۲i} & n \geq ۱ \\ \frac{a_۰}{۲} & n = ۰ \\ \frac{a_{-n}}{۲} - \frac{b_{-n}}{۲i} & n \leq -۱ \end{cases}$$

پس داریم:

$$c_۰ = \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx.$$

برای $n \geq ۱$:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_n}{۲} + \frac{b_n}{۲i} &= \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx + \frac{۱}{۲pi}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx \\ &= \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)\Big(\cos\frac{n\pi x}{p} - i\sin\frac{n\pi x}{p}\Big)\,dx \\ &= \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx \end{aligned}$$

و برای $n \leq -۱$:

$$\begin{aligned} c_n = \frac{a_{-n}}{۲} - \frac{b_{-n}}{۲i} &= \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx + \frac{۱}{۲pi}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx \\ &= \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx. \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}} \quad , \quad c_n = \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

تذکر. ۱) سری فوق را سری فوریه مختلط f و c_nها را ضرایب فوریه مختلط گویند.

۲) علامت منفی در تابع نمائی از فرمول c_n به فرمول سری فوریه قابل انتقال است.

۳) محاسبه $c_۰$ را بعضاً می‌بایستی جداگانه محاسبه نمود.

۴) همیشه مقصود از سری فوریه، سری فوریه مختلط است.

مثال ۱.۱۲. سری فوریه تابع $f(x) = xe^x, -\pi \leq x \leq \pi$ و $f(x+2\pi) = f(x)$ را به‌دست آورید.

حل. کافیست c_nها را محاسبه کنیم. چون $2p = 2\pi$ پس $p = \pi$.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^x e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{(1-in)x}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{1-in}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{1-in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi e^{\pi}(-1)^n}{1-in} + \frac{\pi e^{-\pi}(-1)^n}{1-in} - \frac{1}{(1-in)^2}e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right). \end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{(-1)^n \cosh\pi}{1-in} - \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n}{(1-in)^2}\sinh\pi \\ f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}\left(\cosh\pi - \frac{\sinh\pi}{\pi(1-in)}\right)e^{inx}. \end{aligned}$$

حال به‌دنبال این هستیم که از سری فوریه مختلط برای حل مسائل معادلات پاره‌ای استفاده کنیم. خاصیت زیر راه‌گشا است.

خاصیت ۱.۱۱. دنباله $\left\{e^{\frac{in\pi x}{p}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V_5 = \Big\{ f : [-p,p] \to \mathbb{R} : \quad f \text{ تناوبی با دوره تناوب } 2p > 0\text{، } f \text{ پیوسته،}$$
$$f' \text{ و } f'' \text{ قطعه‌به‌قطعه پیوسته، } f(-p) = f(p) \text{ و } f'(-p) = f'(p) \Big\}$$

علت. بگیرید $g(x) = f(x), -p \leq x \leq p$ و $g(x+2p) = g(x)$. در این‌صورت $g(x)$، $g'(x)$ و $g''(x)$ تناوبی با دوره تناوب $2p$ است. به‌علاوه g پیوسته و g' و g'' قطعه‌به‌قطعه و g' در نقاط $\pm np$، $n \in \mathbb{N}$، پیوسته است. بنابراین

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}} \quad , \quad g'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{in\pi x}{p} e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

و تساوی در نقاط $\pm np$ برقرار است. بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}} \quad , \quad f'(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{in\pi x}{p} e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

و تساوی در نقاط $\pm np$ برقرار است. پس $\left\{e^{\frac{in\pi x}{p}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه برای $V_۵$ است.

تذکر. پایه نمائی فوق مناسب حل مسائل با شرایط مرزی متناوب است.

شرایط مرزی متناوب: چنان‌چه دامنه متغیر x در یک مسئله معادله دیفرانسیل بازه $[a,b]$ و u تابع مجهول آن مسئله باشد. شرایط مرزی

$$u\Big|_{x=a}=u\Big|_{x=b} \quad , \quad u_x\Big|_{x=a}=u_x\Big|_{x=b}$$

را شرایط مرزی متناوب گویند.

مثال ۱۳.۱. مطلوب است حل مسئله انتقال حرارت

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+۲u_{xt}-u+xt, & -\pi\leq x\leq\pi,\ t\geq ۰ \\ u(x,۰)=x, & \\ u(-\pi,t)=u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t)=u_x(\pi,t) & \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی مسئله همگن متناوب است. پس پایه مناسب حل آن پایه نمائی با $p=\pi$ است. یعنی $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

حال می‌گیریم:

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t)e^{inx}$$

از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{T}_n(t)e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^۲T_n(t)e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} ۲\dot{T}_n(t)ine^{inx}$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(t)e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n te^{inx}$$

که در آن

$$c_n = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{۱}{۲\pi}\Big[x\,\frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx\Big]$$

$$= \begin{cases} ۰ & n = ۰ \\ \dfrac{(-۱)^{n+۱}}{in} & n \neq ۰. \end{cases}$$

کلیه جملات برحسب پایه نمائی است، پس

$$\dot{T}_n(t) = -n^۲T_n(t) + ۲in\dot{T}_n(t) - T_n(t) + c_nt$$

یا

$$(۱-۲in)\dot{T}_n(t) + (n^۲+۱)T_n = c_nt.$$

اگرچه در این معادله i ظاهر شده است لیکن حل آن مانند معادله خطی مرتبه اوّل با ضرایب حقیقی ثابت قابل انجام است. معادله مشخصه $(۱-۲in)r + n^۲ + ۱ = ۰$ و

$$r = \frac{۱+n^۲}{۲in-۱}.$$

پس جواب عمومی آن می‌شود:

$$T_n(t) = A_ne^{\frac{۱+n^۲}{۱-۲in}t} + \frac{c_n}{n^۲+۱}\Big(t - \frac{۱-۲in}{n^۲+۱}\Big).$$

به‌این‌ترتیب جواب عمومی مسئله به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{A_ne^{\frac{۱+n^۲}{۱-۲in}t} + \frac{c_n}{n^۲+۱}\Big(t - \frac{۱-۲in}{n^۲+۱}\Big)\Big\}e^{inx}.$$

برای تعیین جواب مطلوب مسئله می‌بایستی شرایط اولیه را بر این جواب عمومی اعمال کنیم.

$$u(x,۰) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(A_n - c_n\frac{۱-۲in}{(n^۲+۱)^۲}\Big)e^{inx} = x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{inx}$$

به‌این‌ترتیب $A_n = c_n\Big(۱ + \frac{۱-۲in}{(n^۲+۱)^۲}\Big)$ و

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{c_n\Big(۱ + \frac{۱-۲in}{(n^۲+۱)^۲}\Big)e^{\frac{۱+n^۲}{۱-۲in}t} + \frac{c_n}{n^۲+۱}\Big(t - \frac{۱-۲in}{n^۲+۱}\Big)\Big\}e^{inx}.$$

نکته. اگرچه در این جواب i ظاهر شده است لیکن این تابع یک تابع حقیقی است.

تذکر. تابع $u_q(x,t)$ مناسب شرایط مرزی متناوب از فرمول زیر قابل حصول است.

$$u_q(x,t) = A(t)x^۲ + B(t)x.$$

تذکر. چون کلیه مشتقات پایه نمائی از جنس خودش است بنابراین این پایه برای هر معادله خطی با ضرایب ثابت و شرایط مرزی متناوب مناسب است.

تمرین ۴.۱

جواب عمومی معادلات همراه با شرایط مرزی زیر را به‌دست آورید.

۱. $u_t - ۴u_{xx} = ۵۰e^{-۲x}, \qquad -۱ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$u(-۱,t) = t + u(۱,t), \quad u_x(-۱,t) = u_x(۱,t)$

۲. $u_{tt} - u_{xx} + u_{xt} + u = xt, \qquad -\pi \leq x \leq \pi,\ t \geq ۰$

$u(-\pi,t) = u(\pi,t) + t, \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t) - t$

۳. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxtt} + ۴u = e^x t, \qquad -۱ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$u(-۱,t) = u(۱,t) + t, \quad u_x(-۱,t) = u_x(۱,t) - t,$

$u_{xx}(-۱,t) = u_{xx}(۱,t) + ۱, \quad u_{xxx}(-۱,t) = u_{xxx}(۱,t)$

مسائل با شرایط اولیه و مرزی زیر را حل کنید.

۴. $u_t - u_{xx} + ۴u_{xt} + u = e^{۲x}, \qquad -۱ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = x,$

$u(-۱,t) = e^t + u(۱,t), \quad u_x(-۱,t) = u_x(۱,t)$

۵. $u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u = e^t x, \qquad -\pi \leq x \leq \pi,\ t \geq ۰$
$$u(x, ۰) = e^x, \quad u_t(x, ۰) = e^{-x},$$
$$u(-\pi, t) = t + u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) + ۱$$

۶. $u_{tt} + u_{xxxx} + u = xe^t, \qquad ۰ \leq x \leq ۲,\ t \geq ۰$
$$u(x, ۰) = x, \quad u_t(x, ۰) = e^x,$$
$$u(۰, t) = u(۲, t), \quad u_x(۰, t) = u_x(۲, t) + t,$$
$$u_{xx}(۰, t) = u_{xx}(۲, t) + ۱, \quad u_{xxx}(۰, t) = u_{xxx}(۲, t)$$

۵.۱ مسئله اشترم–لیوویل

تا به‌حال در بخش‌های گذشته سه نوع پایه به‌دست آوردیم که هر یک از آن‌ها دسته خاصی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را حل می‌کند.

۱) پایه سینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی دیریکله بدون حضور مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله است.

۲) پایه کسینوسی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی نیومن بدون حضور مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله است.

۳) پایه نمائی مناسب حل مسائل با شرایط مرزی متناوب است.

لیکن مسائل زیاد دیگری وجود دارد که پایه‌های فوق برای آن‌ها قابل کاربرد نیست. هدف از این بخش این است که روشی را ارائه دهیم تا پایه مناسب شرایط مرزی گوناگون را تولید کند. ابزار این کار مسئله اشترم–لیوویل است.

معادله مرتبه دوم

$$a_۱(x)y'' + a_۲(x)y' + (a_۳(x) + \lambda) = ۰, \quad a \leq x \leq b$$

که در آن $a_۱(x) > ۰$ و $a_۲(x)$ و $a_۳(x)$ توابعی پیوسته و λ یک پارامتر است، معادله اشترم–لیوویل

گوییم. علت این نامگذاری به‌خاطر حضور پارامتر λ در آن است. همچنین شرایط مرزی همگن

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0$$

$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0$$

را شرایط مرزی اشترم-لیوویل گوییم که در آن α_1، α_2، β_1 و β_2 مقادیری ثابت هستند و $|\alpha_1|+|\alpha_2|\neq 0$ و $|\beta_1|+|\beta_2|\neq 0$. معادله اشترم-لیوویل همراه با شرایط مرزی اشترم-لیوویل را مسئله اشترم لیوویل (منظم) گویند. مقصود از حل این مسئله تعیین کلیه مقادیر λ است که به‌ازای هر یک از آنها این مسئله جواب غیر صفر دارد و تعیین این جواب غیر صفر است. این کار یک کار مقدماتی است و با تعیین جواب عمومی معادله و اعمال شرایط مرزی این مقادیر λ و این جواب‌های خاص قابل تعیین است.

مثال ۱۴.۱. مسئله اشترم-لیوویل زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0\leq x\leq p \\ y(0)=0, \quad y'(p)=0 & \end{cases}$$

حل. بسته به مقدار λ صورت جواب عمومی معادله فوق عوض می‌شود.

حالت ۱: $\lambda=0$. در این حالت صورت جواب عمومی می‌شود:

$$y=c_1x+c_2.$$

با اعمال شرایط مرزی برای جواب عمومی به‌دست می‌آوریم: $c_1=c_2=0$. پس برای $\lambda=0$ جواب غیر صفر نداریم.

حالت ۲: $\lambda=-\alpha^2<0$. در این حالت

$$y''-\alpha^2y=0$$

$$r^2-\alpha^2=0 \quad\Longrightarrow\quad r=\pm\alpha$$

$$y=c_1\cosh\alpha x+c_2\sinh\alpha x$$

$$y(0)=0 \quad\Longrightarrow\quad c_1=0$$

$$y'(p)=0 \quad\Longrightarrow\quad c_2\cosh\alpha p=0 \quad\Longrightarrow\quad c_2=0$$

پس در این حالت نیز جواب غیر صفر نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^{۲} > ۰$. در این حالت

$$y'' + \beta^{۲} y = ۰$$

$$r^{۲} + \beta^{۲} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad r = \pm i\beta$$

$$y = c_{۱} \cos \beta x + c_{۲} \sin \beta x$$

$$y(۰) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad c_{۱} = ۰$$

$$y'(p) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad c_{۲} \beta \cos \beta p = ۰$$

برای داشتن جواب غیر صفر کافیست بگیریم $\cos \beta p = ۰$ یا

$$\beta = \frac{\pi}{p}(n + \frac{۱}{۲}), \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \cdots$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_n = \frac{\pi^{۲}}{p^{۲}}(n + \frac{۱}{۲})^{۲} \quad , \quad y_n(x) = \sin(n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{p}x.$$

که برای $n = ۰, ۱, ۲, \cdots$ بینهایت جواب متفاوت به‌دست می‌آید.

تذکر. خواهیم دید که $\left\{\sin(n + \frac{۱}{۲})\frac{\pi}{p}x\right\}_{n=۰}^{\infty}$ یک پایه برای شرایط مرزی غیر دیریکله و غیر نیومن

$$u\Big|_{x=۰} = ۰ \quad , \quad u_x\Big|_{x=p} = ۰$$

است. این شرایط مرزی را شرایط مرزی روبین چپ می‌نامیم.

دنبال این هستیم که از جواب‌های مسئله اشترم-لیوویل به‌عنوان پایه برای حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای استفاده کنیم. مطالب زیر را در این جهت داریم.

مقادیر خاص و توابع خاص: اگر برای $\lambda = \lambda_۰$ در یک مسئله اشترم-لیوویل جواب غیر صفر $y_۰(x)$ به‌دست آید. $\lambda_۰$ را یک مقدار خاص یا یک مقدار ویژه این مسئله و $y_۰(x)$ را یک تابع خاص یا یک تابع ویژه وابسته به این مقدار خاص گویند.

ضرب داخلی: فرض کنید $s(x) > ۰$ یک تابع پیوسته با دامنه $[a, b]$ و مجموعه V فضای برداری توابع

قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دامنه $[a,b]$ باشد. برای $f,g\in V$ مقدار $\int_a^b s(x)f(x)g(x)\,dx$ را ضرب داخلی f و g نسبت به تابع وزن $s(x)$ گویند و با $\langle f,g\rangle$ نشان می‌دهند. می‌گویند f و g نسبت به این ضرب داخلی بر هم عموداند اگر $\langle f,g\rangle = ۰$.

توجه کنید ضرب داخلی فوق یک تابع از $V\times V$ به $\mathbb{R}$ است. این تابع در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) برای $a,b\in\mathbb{R}$ و $f_۱,f_۲,g\in V$ داریم:

$$\langle af_۱+bf_۲,g\rangle = a\langle f_۱,g\rangle + b\langle f_۲,g\rangle.$$

۲) برای $f,g\in V$، $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

۳) برای $f\in V$، $\langle f,f\rangle \geq ۰$ و $\langle f,f\rangle = ۰$ تنها برای $f=۰$ برقرار است.

برای بیان خواص مقادیر خاص و توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل نیاز به تابع $q(x)$ و $s(x)$ زیر است که از روی ضرایب معادله اشترم-لیوویل به‌دست می‌آید.

$$q(x) = \frac{a_۳(x)}{a_۱(x)}p(x) \quad , \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_۱(x)}$$

که در آن

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{a_۲(x)}{a_۱(x)}\,dx}.$$

با استفاده از این توابع معادله اشترم-لیوویل را به‌صورت زیر می‌توان نوشت. این معادله را فرم کانونیک معادله اشترم-لیوویل گویند.

$$(p(x)y')' + \big(q(x)+\lambda s(x)\big)y = ۰$$

خواص مقادیر خاص و توابع خاص را به‌صورت زیر داریم.

خاصیت ۱۲.۱ (مقادیر خاص). کلیه مقادیر خاص یک مسئله اشترم-لیوویل اعداد حقیقی‌اند. این مجموعه از اعداد حقیقی شمارا و دارای حداقل مقداراند. آنها را به‌ترتیب صعودی می‌توان منظم نمود. یعنی آنها را به‌صورت دنباله $\{\lambda_n\}_{n=۰}^{\infty}$ می‌توان نوشت و $\lambda_۰<\lambda_۱<\lambda_۲<\cdots<\lambda_n<\cdots$. به‌علاوه $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

خاصیت ۱.۱۳ (توابع خاص). به‌ازای هر مقدار خاص دقیقاً یک تابع خاص، صرف‌نظر از ضریب عددی، داریم. همچنین توابع خاص مقادیر خاص متفاوت نسبت به تابع وزن $s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$ برهم عموداند.

نتیجه اساسی را در خاصیت زیر داریم که بیانگر پایه بودن توابع خاص است.

خاصیت ۱.۱۴ (سری فوریه تعمیم یافته). فرض کنید $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ مقادیر خاص و $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ توابع خاص منطبق بر آن در یک مسئله اشترم-لیوویل باشد. آن‌گاه $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک پایه برای فضای برداری زیر است.

$$V = \Big\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \text{ قطعه‌به‌قطعه پیوسته، } f' \text{ و } f$$

$$\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \text{ و } \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0 \Big\}$$

یعنی دنباله عددی $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

در نقاط پیوستگی f مقدار سری برابر با مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی f مقدار سری برابر با میانگین حد چپ و راست f در آن نقطه است. به‌علاوه c_nها از فرمول زیر قابل حصول است.

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

تذکر. ۱) سری فوق را سری فوریه تعمیم یافته f گویند. تساوی بین تابع و سری فوریه تعمیم یافته آن، تساوی نقطه‌وار به‌جز احتمالاً در تعدادی متنهای نقطه خواهد بود.

۲) اگر $f(x)$ در شرایط مرزی اشترم-لیوویل صدق کند در این‌صورت سری فوریه تعمیم یافته آن نیز در این شرایط مرزی صدق می‌کند. لیکن تساوی بین $f(x)$ و سری فوریه تعمیم یافته آن در نقاط مرزی ممکن است برقرار نباشد.

۳) c_nها را ضرایب فوریه تعمیم یافته گویند.

مثال ۱۵.۱. تابع $f(x) = x, \circ \leq x \leq p$ را بر حسب توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر بسط دهید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = \circ, \\ y'(\circ) = \circ, \quad y(p) = \circ \end{cases}$$

حل. ابتدا مقادیر خاص و توابع خاص را به‌دست می‌آوریم.

حالت ۱: $\lambda = \circ$،

$$y'' = \circ \quad \Longrightarrow \quad y = c_1 x + c_2$$

$$y'(\circ) = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \circ$$

$$y(p) = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \circ$$

پس $\lambda = \circ$، یک مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^2 < \circ$. در این حالت جواب عمومی معادله می‌شود:

$$y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x$$

$$y'(\circ) = \circ \quad \Longrightarrow \quad \alpha c_2 = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \circ$$

$$y(p) = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_1 \cosh \alpha p = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \circ$$

پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^2 > \circ$، در این حالت جواب عمومی به‌صورت زیر است.

$$y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$$

$$y'(\circ) = \circ \quad \Longrightarrow \quad \beta c_2 = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_2 = \circ$$

$$y(p) = \circ \quad \Longrightarrow \quad c_1 \cos \beta p = \circ$$

در نتیجه برای جواب غیر صفر باید $\beta p = (n + \frac{1}{2})\pi$ یا

$$\beta = (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{p} \quad , \quad \lambda = (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{p^2}$$

و

$$y_n(x) = \cos(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{p} x.$$

پس پایه حاصل از این مسئله اشترم-لیوویل به‌صورت زیر است.

$$\left\{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

با توجه به خاصیت اخیر امکان بسط تابع قطعه‌به‌قطعه پیوسته f با دامنه $[0,p]$ برحسب این پایه وجود دارد. یعنی:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}$$

که در آن ضرایب به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$c_n=\frac{\int_0^p f(x)\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx}{\int_0^p \cos^2(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx}=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx.$$

در نقاط مرزی بازه ممکن است تساوی بین سری و تابع برقرار نباشد.

به‌عنوان مثال برای تابع $f(x)=x,\ 0\le x\le p$،

$$c_n=\frac{2}{p}\int_0^p x\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx=\frac{2}{p}\left\{x\frac{p}{\pi(n+\frac{1}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right|_0^p$$
$$-\int_0^p\frac{p}{\pi(n+\frac{1}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx\Bigg\}=\frac{4p(-1)^n}{(2n+1)\pi}-\frac{8p}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{4p(-1)^n}{(2n+1)\pi}-\frac{8p}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p},\qquad 0\le x\le p.$$

مشاهده می‌شود در دو نقطه مرزی تساوی برقرار نیست.

تذکر. نظر به‌این‌که کلیه مقادیر خاص $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ و توابع خاص وابسته به آنها $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ در معادله اشترم-لیوویل صدق می‌کند، یعنی داریم:

$$a_1(x)\phi_n''(x)+a_2(x)\phi_n'(x)+(a_3+\lambda_n)\phi_n=0$$

یا

$$a_1(x)\phi_n''+a_2(x)\phi_n'=-a_3(x)\phi_n-\lambda_n\phi_n.$$

از این پایه برای مسائلی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌توان استفاده کرد که شرایط زیر برقرار باشد.

۱) شرایط مرزی مسئله با شرایط مرزی مسئله اشترم-لیوویل تطبیق داشته باشد. یعنی:

$$\alpha_1 u + \alpha_2 u_x \Big|_{x=a} = 0$$
$$\beta_1 u + \beta_2 u_x \Big|_{x=b} = 0$$

۲) مشتقات ظاهر شده نسبت به x در معادله به‌شکل فاکتورهایی از مشتقات ظاهر شده در معادله اشتورم-لیوویل وابسته باشد. یعنی به‌شکل:

$$a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x$$

یا

$$\Big(a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x\Big)_t \quad \text{و} \quad \Big(a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x\Big)_{tt}$$

که در آن منظور از اندیس t مشتق نسبت به t است.

به‌عنوان مثال پایه $\left\{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب حل مسایل زیر است.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = xt, & 0 \le x \le p,\ t \ge 0 \\ u_x(0,t) = t^2, \quad u(p,t) = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xxt} + u_{xxxx} - u_{xx} + u = xt, & 0 \le x \le p,\ t \ge 0 \\ u_x(0,t) = t, \quad u(p,t) = 1, \quad u_{xxx}(0,t) = t^2, \quad u_{xx}(p,t) = 2 \end{cases}$$

تذکر. پایه $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر است.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(p) = 0.$$

همچنین پایه $\left\{\cos\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$ توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر است.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(p) = 0.$$

تا به‌حال پنج پایه به‌دست آورده‌ایم. در این‌جا درباره هر یک از آنها توضیحاتی داریم.

۱) پایه سینوسی قدیم یعنی $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی دیریکله یعنی، $u\big|_{x=0}$ و $u\big|_{x=p}$ است مشروط بر این‌که در معادله مشتق فرد نسبت به x ظاهر نشده باشد.

۲) پایه کسینوسی قدیم یعنی $\left\{\cos\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی نیومن یعنی، $u_x\big|_{x=0}$ و $u_x\big|_{x=p}$ است مشروط بر این‌که در معادله مشتق فرد نسبت به x نداشته باشیم.

۳) پایه نمائی یعنی $\left\{e^{\frac{in\pi x}{p}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$: این پایه مناسب حل هر مسئله با شرایط مرزی متناوب یعنی، $u\big|_{x=-p}-u\big|_{x=p}$ و $u_x\big|_{x=-p}-u_x\big|_{x=p}$ است.

۴) پایه سینوسی جدید یعنی $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی روبین چپ یعنی، $u_x\big|_{x=p}$ و $u\big|_{x=0}$ داده شده باشد و مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله نباشد.

۵) پایه کسینوسی جدید یعنی $\left\{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$: این پایه مناسب حل مسائل با شرایط مرزی روبین راست یعنی، $u\big|_{x=p}$ و $u_x\big|_{x=0}$ است مشروط بر این‌که مشتق از مرتبه فرد نسبت به x در معادله ظاهر نشده باشد.

تذکر. برای پایه‌های سینوسی‌ها وکسینوسی‌ها ضرایب فوریه از فرمول

$$c_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\phi_n(x)\,dx$$

به‌دست می‌آیند و برای پایه نمائی ضرایب فوریه از فرمول

$$c_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^p f(x)\phi_n(x)\,dx.$$

محاسبه می‌شوند.

تذکر. پایه‌ای مناسب حل یک مسئله است اگر

۱) در شرایط مرزی همگن آن مسئله صدق کند.

۲) جواب مسئله را بر حسب این پایه بنویسیم و در معادله قرار دهیم کلیه سری‌های فوریه ظاهر شده بر حسب این پایه باشد.

مثال ۱۶.۱. پایه $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})x\right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب حل مسئله زیر است.

$$\begin{cases} u_{tt}+u_{xxxxt}-u_{xxtt}-u_{xx}+u=xt, & 0\le x\le \pi,\ t\ge 0\\ u(x,0)=x, \quad u_t(x,0)=x^2 \\ u(0,t)=t, \quad u_x(\pi,t)=t^2, \quad u_{xx}(0,t)=1, \quad u_{xxx}(\pi,t)=0 \end{cases}$$

تذکر. مسائل اشترم-لیوویل مرتبه بالاتر نیز به‌صورت مشابه قابل تعریف است.

تمرین ۵.۱

مسائل اشترم-لیوویل زیر را حل کنید.

۱. $y''+2y'+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(1)=0$.

۲. $y''+2y'+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y'(1)=0$.

۳. $y''-2y'+\lambda y=0, \quad y'(0)=0, \quad y'(\pi)=0$.

۴. $x^2y''+xy'+\lambda y=0, \quad y(1)=0, \quad y(e)=0$.

۵. $(1+x)^2y''+2(1+x)y'+\lambda y=0, \quad y'(0)=0, \quad y'(1)=0$.

۶. تابع $f(x)=x^2$ را روی $[0,\pi]$ برحسب توابع خاص مسئله اشترم-لیوویل زیر بسط دهید.

$$y''+2y'+\lambda y=0, \quad y'(0)=0, \quad y(\pi)=0.$$

۶.۱ روش جداسازی

در بخش قبل تحت عنوان مسئله اشترم-لیوویل دیدیم چگونه برای هر شرط مرزی اشترم-لیوویل با استفاده از معادله آن، پایه تولید کنیم. در این بخش دنبال این هستیم که برای یک مسئله داده شده

معادلات با مشتقات پاره‌ای با شرایط اولیه و مرزی چگونه مسئله اشترم-لیوویل مناسب آن را بنویسیم و با استفاده از پایه حاصل از این مسئله، مسئله معادله پاره‌ای را حل کنیم.

فرض کنید u تابع مجهول معادله و x یکی از متغیرهای مستقل مکان مسئله و بخواهیم معادله اشترم-لیوویل مربوط به x را بنویسیم. برای اینکار ابتدا کلیه جملات حاوی مشتق نسبت به x را از معادله جدا و کنار هم می‌نویسیم. سپس نسبت به مشتقات یکسان متغیرهای دیگر فاکتور می‌گیریم. هر یک از مشتقات نسبت به x را برابر $-\lambda u$ قرار می‌دهیم. به‌این‌ترتیب چند معادله اشترم-لیوویل به‌دست می‌آید. هر یک از این معادلات اشترم-لیوویل را با شرایط مرزی مسئله حل می‌کنیم. چنان‌چه پایه‌های حاصل یکسان باشد. این پایه مناسب حل مسئله است.

مثال ۱.۱۷. پایه مناسب مسئله زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} - u_{xxtt} + u = xt, & \circ \le x \le \pi,\ t \ge \circ \\ u(x,\circ) = x, \quad u_t(x,\circ) = x^{\text{۲}}, & \\ u(\circ,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = t^{\text{۲}}, \quad u_{xx}(\circ,t) = \text{۱}, \quad u_{xxx}(\pi,t) = \circ & \end{cases}$$

حل. جملات مربوط به مشتقات x عبارتند از

$$u_{xxxx} \quad , \quad u_{xxtt}.$$

پایه باید طوری باشد که این مشتقات را بر حسب u بیان کند. پس مسئله اشترم-لیوویل باید طوری باشد که داشته باشیم:

$$u_{xxxx} = -\lambda u \quad , \quad u_{xxtt} = -\lambda' u_{tt}.$$

پس معادلات اشترم-لیوویل می‌شود:

$$y^{(\text{۴})} + \lambda y = \circ \quad , \quad y'' + \lambda' y = \circ.$$

شرایط مرزی اشترم-لیوویل نیز به‌صورت زیر است.

$$y(\circ) = \circ, \quad y'(\pi) = \circ, \quad y''(\circ) = \circ, \quad y'''(\pi) = \circ.$$

مسئله اشترم-لیوویل

$$y'' + \lambda' y = \circ, \quad y(\circ) = \circ, \quad y'(\pi) = \circ$$

دارای مقادیر خاص $\lambda'_n = (n+\frac{1}{2})^2$ و توابع خاص $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})x\right\}_{n=0}^{\infty}$ می‌باشد.

مسئله اشترم-لیوویل دیگر را به‌صورت زیر داریم.

$$\begin{cases} y^{(4)} + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(\pi) = 0. \end{cases}$$

حالت ۱: $\lambda = 0$. در این حالت جواب عمومی به‌صورت زیر است.

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c.$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. پس $\lambda = 0$ مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^4 < 0$. در این حالت معادله عبارت است با

$$\begin{aligned} &y^{(4)} + \alpha^4 y = 0 \\ &r^4 + \alpha^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \alpha\sqrt[4]{-1} = \pm\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

پس جواب عمومی را به‌صورت زیر داریم:

$$y = e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x}\left(c_1\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + c_2\sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x\right) + e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x}\left(c_3\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + c_4\sin\frac{\alpha}{\sqrt{2}}x\right).$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم، $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^4$. معادله را به‌صورت $y^{(4)} + y = 0$ داریم.

$$\begin{aligned} &r^4 - \beta^4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = \pm\beta, \pm i\beta \\ &y = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x + c_3\cosh\beta x + c_4\sinh\beta x \\ &y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 + c_3 = 0 \\ &y''(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -c_1 + c_3 = 0. \end{aligned}$$

پس $c_1 = c_3 = 0$. همچنین

$$y'(\pi) = \beta c_2 \cos\beta\pi + \beta c_4 \cosh\beta\pi = 0$$
$$y'''(\pi) = -\beta^3 c_2 \cos\beta\pi + \beta^3 c_4 \cosh\beta\pi = 0.$$

به‌این‌ترتیب برای جواب غیر صفر به‌دست می‌آوریم.

$$c_4 \cosh\beta\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_4 = 0$$
$$c_2 \cos\beta\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta\pi = (n + \frac{1}{2})\pi.$$

یا $\beta_n = (n + \frac{1}{2})$، $\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2$ و $y_n = \sin(n + \frac{1}{2})x$.
پایه حاصل پایه $\left\{\sin(n + \frac{1}{2})x\right\}_{n=0}^{\infty}$ می‌باشد. پس این پایه مسئله را حل می‌کند. یعنی ابتدا می‌بایستی $u_q(x,t)$ را از روی شرایط مرزی تعیین کنیم. سپس با تغییر تابع مجهول $u(x,t) = u_q(x,t) + v(x,t)$ مسئله را برای v بنویسیم تا شرایط مرزی همگن گردد. در انتها می‌گیریم:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin(n + \frac{1}{2})x.$$

از قرار دادن v در مسئله و تعیین $T_n(t)$ها حل مسئله کامل می‌شود.

مثال ۱.۱۸. پایه‌های مناسب حل مسئله زیر را بیابید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_{xxyy} + u_{zz} + 2u_z + u + xyzt, & 0 \le x,y,z \le \pi,\ t \ge 0 \\ u(x,y,z,0) = xyz, \\ u(0,y,z,t) = 0, \quad u_x(\pi,y,z,t) = 0, \\ u_y(x,0,z,t) = 0, \quad u(x,\pi,z,t) = 0, \\ u(x,y,0,t) = 0, \quad u(x,y,\pi,t) = 0 \end{cases}$$

حل. مشتقات مربوط به x را به‌صورت زیر داریم:

$$u_{xx} \quad , \quad u_{xxyy}.$$

پس مسئله اشترم-لیوویل باید تساوی‌های زیر را به‌دست دهد:

$$u_{xx} = -\lambda u \quad , \quad u_{xxyy} = -\lambda' u_{yy}.$$

پس مسئله اشترم-لیوویل x را به‌صورت زیر داریم.

$$X''(x) + \lambda X = ۰, \quad X(۰) = ۰, \quad X'(\pi) = ۰.$$

از حل این مسئله پایه سینوسی دوم با $p = \pi$ به‌دست می‌آید. یعنی:

$$\left\{ \sin(n + \tfrac{۱}{۲})x \right\}_{n=۰}^{\infty}.$$

معادله اشترم-لیوویل y باید طوری باشد که برای آن داشته باشیم:

$$u_{xxyy} = -\lambda u_{xx}.$$

پس این مسئله باید به‌صورت زیر باشد.

$$y''(y) + \lambda y = ۰, \quad y'(۰) = ۰, \quad y(\pi) = ۰$$

از حل این مسئله پایه کسینوسی دوم، $p = \pi$ به‌دست می‌آید. یعنی:

$$\left\{ \cos(n + \tfrac{۱}{۲})y \right\}_{n=۰}^{\infty}.$$

معادله اشترم-لیوویل مربوط به z می‌بایستی طوری باشد تا تساوی زیر را برقرار کند.

$$u_{zz} + ۲u_z = -\lambda u.$$

پس این معادله به‌صورت زیر است.

$$Z''(z) + ۲Z'(z) + \lambda Z = ۰.$$

شرایط مرزی همگن آن نیز به‌صورت زیر است.

$$Z(۰) = ۰ \quad , \quad Z(\pi) = ۰.$$

معادله مشخصه عبارت است از

$$r^2 + 2r + \lambda = 0.$$

حالت ۱: $\lambda = 0$. در این حالت $r = -2$ و $r = 0$ و

$$Z = c_1 + c_2 e^{-2z}$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم $c_1 = c_2 = 0$. پس $\lambda = 0$ مقدار خاص نیست.

حالت ۲: $\lambda = -\alpha^2 < 0$.

$$\begin{aligned}
&r^2 + 2r + \lambda = 0\\
&r = -1 \pm \sqrt{1+\alpha^2} = r_1, r_2 \quad , \quad r_1 > 0, r_2 < 0\\
&Z = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z}
\end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آید $c_1 = c_2 = 0$. پس مقدار خاص منفی نداریم.

حالت ۳: $\lambda = \beta^2 > 0$. داریم:

$$r^2 + 2r + \beta^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = -1 \pm \sqrt{1-\beta^2}$$

اگر $1 - \beta^2 \geq 0$، به‌دست می‌آید:

$$Z = c_1 e^{r_1 z} + c_2 e^{r_2 z}, \quad r_1 < 0, r_2 < 0$$

با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آوریم $c_1 = c_2 = 0$. پس برای $0 \leq \lambda \leq 1$ هم جواب غیر صفر نداریم. یا مقدار خاص بین صفر و یک نداریم.

اگر $1 - \beta^2 = -\gamma^2 < 0$ در این صورت $r = -1 \pm i\gamma$ و

$$\begin{aligned}
&Z = e^{-z}\Big(c_1 \cos \gamma z + c_2 \sin \gamma z\Big)\\
&Z(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0\\
&Z(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_2 e^{-\pi} \sin \gamma\pi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin \gamma\pi = 0\\
&\qquad \Longrightarrow \quad \gamma\pi = n\pi \quad \Longrightarrow \quad \gamma = n
\end{aligned}$$

پس مقادیر خاص عبارت‌اند از $\lambda_n = ۱ + n^۲$ و توابع خاص $e^{-z}\sin nz$، $n = ۱, ۲, \cdots$. پس پایه مناسب متغیر z عبارت است از

$$\left\{e^{-z}\sin nz\right\}_{n=۱}^{\infty}.$$

همچنین اگر

$$f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} c_n e^{-z}\sin nz$$

در این‌صورت

$$c_n = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} e^{z} f(z)\sin nz\, dz.$$

به‌این‌ترتیب پایه‌های زیر را برای حل این مسئله به‌دست می‌آوریم.

$$\left\{\sin(n+\tfrac{۱}{۲})x\right\}_{n=۰}^{\infty} \quad , \quad \left\{\cos(m+\tfrac{۱}{۲})y\right\}_{m=۰}^{\infty} \quad , \quad \left\{e^{-z}\sin kz\right\}_{k=۱}^{\infty}.$$

حال سوال این است چگونه با استفاده از این پایه‌ها مسئله را حل کنیم. برای این‌کار باید بگیریم.

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{k=۱}^{\infty} T_{nmk}(t)\sin(n+\tfrac{۱}{۲})x\,\cos(m+\tfrac{۱}{۲})y\, e^{-z}\sin kz$$

با قرار دادن آن در مسئله $T_{nmk}(t)$ قابل تعیین و جواب نهایی به‌دست می‌آید. علت آن را در بخش بعدی تحت عنوان سری فوریه مضاعف خواهیم داشت.

تمرین ۶.۱

مسئله اشترم–لیوویل هر یک از متغیرهای مکان مسائل زیر را به‌دست آورید.

۱. $u_{tt} + ۲u_t - u_{xx} + ۲u_x + u = xt, \qquad ۰ \le x \le ۱,\ t \ge ۰$

$u(x,۰) = ۰, \quad u_t(x,۰) = ۰,$

$u(۰,t) = e^t, \quad u(۱,t) = t$

۲. $u_t - ۴u_{xx} - u_{txx} = xt, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$$u(x,۰) = x^۲, \quad u(۰,t) = t, \quad u_x(۱,t) = t^۲$$

۳. $u_t = u_{xx} + ۴u_{yy} + u + xyt, \qquad ۰ \leq x,y \leq ۱,\ t \geq ۰$

$$u(x,y,۰) = xy,$$
$$u(۰,y,t) = yt^۲, \quad u_x(۱,y,t) = y^۲t,$$
$$u_y(x,۰,t) = x^۲t^۲, \quad u_y(x,۱,t) = xt$$

۴. $r^۲u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = r\sin\theta, \qquad ۰ \leq \theta \leq \pi,\ ۱ \leq r \leq ۲$

$$u(r,۰) = r, \quad u_\theta(r,\pi) = ۰, \quad u(۱,\theta) = \theta, \quad u(۲,\theta) = ۰$$

۵. $u_{tt} = u_{xx} + ۴u_{yy} + ۴u_y + u_{zz}, \qquad ۰ \leq x,y,z \leq ۱,\ t \geq ۰$

$$u(x,y,z,۰) = xy^۲, \quad u_t(x,y,z,۰) = yz^۲,$$
$$u(۰,y,z,t) = zt, \quad u_x(۱,y,z,t) = yt^۲,$$
$$u_y(x,۰,z,t) = xt, \quad u_y(x,۱,z,t) = zt,$$
$$u_z(x,y,۰,t) = yt, \quad u(x,y,۱,t) = xt^۲$$

۶. $u_{tt} + ۲u_t + u_{txx} + u_{xxxx} = xt^۲, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$$u(x,۰) = x^۲, \quad u_t(x,۰) = x,$$
$$u_x(۰,t) = t^۲, \quad u(۱,t) = t, \quad u_{xxx}(۰,t) = ۱, \quad u_{xx}(۱,t) = t$$

۷.۱ سری فوریه دوگانه و چندگانه

در بعضی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای تعداد متغیرهای مکان دو و یا بیشتر از دوتا است. با استفاده از مسئله اشترم-لیوویل برای هر یک از آن‌ها تهیه پایه انجام پذیر است. از حاصل‌ضرب آن پایه‌ها پایه دو متغیره یا بیشتر از دو به‌دست می‌آید و جواب مسئله به‌صورت یک سری فوریه چندگانه قابل ارائه است. هدف از این بخش نمایش این سری و ضرایب آن است.

فرض کنید $f(x,y)$ تابعی قطعه‌به‌قطعه پیوسته و تناوبی با دوره تناوب $۲p > ۰$ نسبت به x و $۲q > ۰$

نسبت به y باشد. برای y معین می‌توان نوشت:

$$f(x,y)=\frac{a_\circ(y)}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\left(a_n(y)\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)$$
$$a_n(y)=\frac{۱}{p}\int_{-p}^{p}f(x,y)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx,\quad n=\circ,۱,۲,\cdots$$
$$b_n(y)=\frac{۱}{p}\int_{-p}^{p}f(x,y)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx,\quad n=۱,۲,۳,\cdots$$

توابع $a_n(y)$ و $b_n(y)$ نیز تناوبی بادوره تناوب $۲q>\circ$ و قطعه‌به‌قطعه پیوسته هستند. پس دارای سری فوریه‌اند.

$$a_n(y)=\frac{a_{n\circ}}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\left(a_{nm}\cos\frac{m\pi y}{q}+b_{nm}\sin\frac{m\pi y}{q}\right),$$
$$\begin{aligned}a_{nm}&=\frac{۱}{q}\int_{-q}^{q}a_n(y)\cos\frac{m\pi y}{q}\,dy\\&=\frac{۱}{pq}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}f(x,y)\cos\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{n\pi x}{p}\,dxdy,\\b_{nm}&=\frac{۱}{q}\int_{-q}^{q}b_n(y)\sin\frac{m\pi y}{q}\,dy\\&=\frac{۱}{pq}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}f(x,y)\sin\frac{m\pi y}{q}\cos\frac{n\pi x}{p}\,dxdy.\end{aligned}$$

$$b_n(y)=\frac{c_{n\circ}}{۲}+\sum_{m=۱}^{\infty}\left(c_{nm}\cos\frac{m\pi y}{q}+d_{nm}\sin\frac{m\pi y}{q}\right),$$
$$\begin{aligned}c_{nm}&=\frac{۱}{q}\int_{-q}^{q}b_n(y)\cos\frac{m\pi y}{q}\,dy\\&=\frac{۱}{pq}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}f(x,y)\cos\frac{m\pi y}{q}\sin\frac{n\pi x}{p}\,dxdy,\\d_{nm}&=\frac{۱}{q}\int_{-q}^{q}b_n(y)\sin\frac{m\pi y}{q}\,dy\\&=\frac{۱}{pq}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q}f(x,y)\sin\frac{m\pi y}{q}\sin\frac{n\pi x}{p}\,dxdy.\end{aligned}$$

از قرار دادن این سری‌های فوریه در سری فوریه قبلی به‌دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{a_{00}}{4} &+ \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{0m}\cos\frac{m\pi y}{q} + b_{0m}\sin\frac{m\pi y}{q}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n0}\cos\frac{n\pi x}{p} + c_{n0}\sin\frac{n\pi x}{p}\right) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(a_{nm}\cos\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi y}{q} + b_{nm}\cos\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q} \\
&\qquad + c_{nm}\sin\frac{n\pi x}{p}\cos\frac{m\pi y}{q} + d_{nm}\sin\frac{n\pi x}{p}\sin\frac{m\pi y}{q}\Big)
\end{aligned}
$$

این سری را سری فوریه دوگانه f گویند. با استفاده از سری فوریه مختلط آن را به‌صورت فشرده زیر می‌توان نوشت:

$$
f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{i(\frac{m\pi}{q}y+\frac{n\pi}{p}x)}
$$

$$
c_{nm} = \frac{1}{4pq}\int_{-p}^{p}\int_{-q}^{q} f(x,y)e^{-i(\frac{m\pi}{q}y+\frac{n\pi}{p}x)}\,dxdy.
$$

در ارتباط با پایه برای مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاوی دو متغیر مکان خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۱.۱۵. اگر در یک مسئله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای دو متغیر مکان یا بیشتر باشد پایه مناسب حل آن مسئله از حاصل‌ضرب پایه‌های هر یک از متغیرها به‌دست می‌آید. به‌علاوه جواب مسئله به‌صورت سری فوریه دوگانه یا چندگانه قابل نمایش است. ضرایب فوریه هم از حاصل‌ضرب ضرایب فوریه به‌صورت مشابه قابل حصول است.

مثال ۱.۱۹. مطلوبست حل مسئله معادله پوآسون همراه با شرایط مرزی زیر

$$
\begin{cases}
u_{xx} + u_{yy} + u = x + y, & 0 \le x,y \le 1 \\
u_y(x,0) = x, \quad u(x,1) = x, \quad u(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = y
\end{cases}
$$

حل. پایه مناسب برای x پایه سینوسی جدید با $p = 1$ و پایه مناسب y پایه کسینوسی جدید با $q = 1$ است. پس پایه مناسب عبارت است از

$$
\left\{\sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x\cos(m+\tfrac{1}{2})\pi y\right\}_{n,m=0}^{\infty}.
$$

همچنین می‌توان گرفت $u_q(x,y) = xy$. پس تغییر تابع مجهول را به‌صورت $u(x,y) = v(x,y) + xy$ داریم. مسئله برای v را به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} + v = -xy + x + y, & 0 \le x, y \le 1 \\ v_y(x,0) = 0, \quad v(x,1) = 0, \quad v(0,y) = 0, \quad v_x(1,y) = 0 \end{cases}$$

حال می‌گیریم:

$$v(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi y.$$

از قرار دادن آن در معادله و برابر قرار دادن ضرایب جملات متناظر به‌دست می‌آوریم.

$$-\left[(n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2 + (m+\tfrac{1}{2})^2\pi^2 - 1\right] A_{nm} = b_{nm} + c_{nm} + d_{nm}$$

که در آن

$$\begin{aligned} b_{nm} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 -xy \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi y \, dxdy \\ c_{nm} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 x \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi y \, dxdy \\ d_{nm} &= 4 \int_0^1 \int_0^1 y \sin(n+\tfrac{1}{2})\pi x \cos(m+\tfrac{1}{2})\pi y \, dxdy. \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} b_{nm} &= 16 \frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \left[\frac{(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2} - \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right] \\ c_{nm} &= \frac{4(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \cdot \frac{(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})\pi} \\ d_{nm} &= \frac{4}{(n+\frac{1}{2})\pi} \left[\frac{(-1)^m}{(m+\frac{1}{2})\pi} - \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right] \end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب

$$A_{nm} = \frac{b_{nm} + c_{nm} + d_{nm}}{1 - (n+\frac{1}{2})^2\pi^2 - (m+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

مثال ۱.۲۰. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u + xyze^t, & \circ \le x, y \le \pi,\ |z| \le \pi,\ t \ge \circ \\ u(x,y,z,\circ) = xyz, \\ u\Big|_{x=\circ} = \circ, \quad u\Big|_{x=\pi} = \circ, \quad u\Big|_{y=\circ} = \circ, \quad u_y\Big|_{y=\pi} = \circ, \\ u\Big|_{z=-\pi} = u\Big|_{z=\pi}, \quad u_z\Big|_{z=-\pi} = u_z\Big|_{z=\pi}. \end{cases}$$

حل. پایه مناسب برای x سینوسی قدیم با $p = \pi$ و پایه مناسب برای y سینوسی جدید با $q = \pi$ و پایه مناسب برای z نمائی با $p = \pi$ است. به‌این‌ترتیب پایه مناسب حل مسئله عبارت است از

$$\left\{ \sin nx \sin(m + \tfrac{۱}{۲})y\, e^{ijz} \right\}_{n=۱, m=\circ, j=-\infty}^{\infty}.$$

حال بگیرید.

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{m=\circ}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_{nmj}(t) \sin nx \sin(m + \tfrac{۱}{۲})y\, e^{ijz}.$$

از قرار دادن آن در معادله و برابر قرار دادن ضرایب پایه به‌دست می‌آوریم.

$$\dot{T}_{nmj}(t) = -\left[n^۲ + (m + \tfrac{۱}{۲})^۲ + j^۲ - ۱ \right] T_{mnj} + c_{nmj} e^t$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_{nmj} &= \frac{۲}{\pi^۳} \int_\circ^\pi \int_\circ^\pi \int_{-\pi}^\pi xyz \sin nx \sin(m + \tfrac{۱}{۲})y\, e^{-ijz}\, dxdydz \\ &= \frac{۲}{\pi^۳} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} \frac{(-۱)^m}{m + \frac{۱}{۲}} \frac{۲\pi i (-۱)^j}{j}. \end{aligned}$$

از قرار دادن آن در شرط اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$T_{nmj}(\circ) = c_{mnj}.$$

جواب عمومی معادله T_{nmj} را به‌صورت زیر داریم.

$$T_{nmj}(t) = A_{nmj} e^{-\left[n^۲ + (m + \frac{۱}{۲})^۲ + j^۲ - ۱ \right] t} + \frac{c_{nmj} e^t}{n^۲ + (m + \frac{۱}{۲})^۲ + j^۲ - ۱}$$

با اعمال شرط اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$A_{nmj} = -\frac{c_{nmj}}{n^۲ + (m + \frac{۱}{۲})^۲ + j^۲ - ۱} + c_{nmj}.$$

تذکر. ۱) چنان‌چه در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاوی دو متغیر مکان یا بیشتر شرایط مرزی غیر همگن باشد تعیین u_q چندان آسان نیست.

۲) لاپلاسین را در مختصات دکارتی دوبعدی و سه بعدی

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

و در مختصات قطبی در صفحه به‌صورت

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}$$

داریم.

تمرین ۷.۱

مسائل با شرایط مرزی و یا شرایط اولیه مرزی زیر را حل کنید.

۱. $\Delta u = x\cos y, \qquad ۰ \le x \le ۱, ۰ \le y \le \pi$

$u_x(۰, y) = ۰, \quad u_x(۱, y) = ۰, \quad u_y(x, ۰) = ۰, \quad u(x, \pi) = ۰$

۲. $\Delta u = r\theta, \qquad ۱ \le r \le e, ۰ \le \theta \le \pi$

$u\Big|_{r=۱} = ۰, \quad u\Big|_{r=e} = ۰, \quad u\Big|_{\theta=۰} = ۰, \quad u_\theta\Big|_{\theta=\pi} = ۰$

۳. $\Delta u = xye^z, \qquad \circ \leq x,y,z \leq \pi$

$$u_x\big|_{x=\circ} = \circ, \quad u\big|_{x=\pi} = \circ, \quad u\big|_{y=\circ} = \circ, \quad u_y\big|_{y=\pi} = \circ,$$
$$u_z\big|_{z=\circ} = \circ, \quad u_z\big|_{z=\pi} = \circ$$

۴. $u_t = ۴\Delta u + xyt, \qquad \circ \leq x,y \leq ۱,\ t \geq \circ$

$$u(x,y,\circ) = ye^x,$$
$$u(\circ,y,t) = u_x(۱,y,t) = u_y(x,\circ,t) = u_y(x,۱,t) = \circ$$

۵. $u_{tt} = u_{xx} + ۴u_{yy} + xe^{y+t}, \qquad \circ \leq x \leq \pi,\ -\pi \leq y \leq \pi,\ t \geq \circ$

$$u(x,y,\circ) = xye^x, \quad u_t(x,y,\circ) = y,$$
$$u\big|_{x=\circ} = u\big|_{x=\pi} = \circ, \quad u\big|_{y=-\pi} = u\big|_{y=\pi}, \quad u_y\big|_{y=-\pi} = u_y\big|_{y=\pi}$$

۶. $u_{tt} = ۴\Delta u + xyzt, \qquad \circ \leq x,y,z \leq ۱,\ t \geq \circ$

$$u\big|_{t=\circ} = xye^z, \quad u_t\big|_{t=\circ} = \circ, \quad u\big|_{x=\circ} = u\big|_{x=۱} = \circ,$$
$$u\big|_{y=\circ} = u_y\big|_{y=۱} = \circ, \quad u_z\big|_{z=\circ} = u_z\big|_{z=۱} = \circ$$

۷. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{yy} = xye^t, \qquad \circ \leq x,y \leq ۱,\ t \geq \circ$

$$u\big|_{t=\circ} = xy, \quad u_t\big|_{t=\circ} = e^{x+y},$$
$$u\big|_{x=\circ} = u_x\big|_{x=۱} = u_{xx}\big|_{x=\circ} = u_{xxx}\big|_{x=۱} = u_y\big|_{y=\circ} = u\big|_{y=۱} = \circ$$

۸.۱ مسائل چند متغیر مکان و تبدیلات فوریه متناهی

در دو بخش اخیر مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای با دو متغیر مکان یا بیشتر مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور قبلاً بیان کردیم برای این‌گونه مسائل تعیین تابع $u_q(x,t)$ برای شرایط مرزی غیر همگن چندان آسان نیست. به‌خصوص در حالتی‌که این شرایط مرزی در گوشه‌های میدان ناپیوسته است می‌توان گفت تعیین آن در کلیت غیر ممکن است. حل این‌گونه مسائل با استفاده از پایه می‌بایستی با توجه به مراحل زیر پایه‌به‌پایه عمل شود.

فرض کنید در یک مسئله دو متغیر مکان x و y و زمان t داریم و پایه را برای متغیر x به‌صورت $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ و برای متغیر y به‌صورت $\{\psi_m(y)\}_{m=0}^{\infty}$ به‌دست آورده‌ایم.

مرحله ۱: ابتدا $u_q(x,y,t)$ را طوری به‌دست آورید تا فقط در شرایط مرزی متغیر x صدق کند. این‌کار با استفاده از فرمول‌هایی که قبلاً داده شده است مقدور است.

مرحله ۲: بگیرید $u(x,y,t) = v(x,y,t) + u_q(x,y,t)$ و مسئله را برای v بنویسید. شرایط مرزی برای v به‌صورت همگن است.

مرحله ۳: بگیرید

$$v(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(y,t)\phi_n(x)$$

آن را در مسئله قرار دهید. با برابر قرار دادن ضرایب عناصر پایه در هر یک از تساوی‌ها سرانجام به یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای F_n می‌رسیم که شرایط مرزی آن ممکن است غیر همگن باشد.

مرحله ۴: مسئله F_n فوق یک متغیر مکان دارد و با پایه $\{\psi_m(y)\}_{m=0}^{\infty}$ قابل حل است. این جواب که به‌صورت سری فوریه است را در سری فوق قرار دهید جواب نهائی حاصل می‌گردد.

مثال ۲۱.۱. مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_{yy} + xye^t, & 0 \le x,y \le 1,\ t \ge 0 \\ u(x,y,0) = xy, & \\ u(0,y,t) = yt, \quad u_x(1,y,t) = t, \quad u(x,0,t) = t, \quad u(x,1,t) = 0 & \end{cases}$$

حل. تعیین $u_q(x,y,t)$ برای این مسئله با چندجمله‌ای امکان‌پذیر نیست چون باید $u_q(0,y,t) = yt$ و $u_q(x,0,t) = t$ باشد. پس $u_q(x,y,t)$ در $(0,0,t)$ باید ناپیوسته باشد.

پایه مناسب برای x سینوسی جدید با $p = 1$ یعنی $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\pi x\right\}_{n=0}^{\infty}$ و برای y سینوسی قدیم با $p = 1$ یعنی $\left\{\sin n\pi y\right\}_{n=1}^{\infty}$ است.

مرحله ۱: تعیین u_q برای شرایط مرزی x.

$$u_q(x,y,t) = Ax + B$$
$$u_q(۰,y,t) = B = yt$$
$$u_{q_x}(۱,y,t) = A = t$$

پس $u_q(x,y,t) = xt + yt$.

توجه کنید این u_q در شرایط مرزی y صدق نمی‌کند.

مرحله ۲: مسئله را برای $v(x,y,t) = u(x,y,t) - xt - yt$ بنویسیم:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + ۴v_{yy} + xye^t - x - y, & ۰ \leq x,y \leq ۱,\ t \geq ۰ \\ v(x,y,۰) = xy, \\ v(۰,y,t) = ۰,\ v_x(۱,y,t) = ۰,\ v(x,۰,t) = t - xt,\ v(x,۱,t) = -t - xt \end{cases}$$

مرحله ۳: حل مسئله v:

$$v(x,y,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} F_n(y,t) \sin(n + \tfrac{۱}{۲})x$$

از قرار دادن آن در مسئله به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} F_{n_t} = -(n+\tfrac{۱}{۲})^۲ F_n + ۴F_{n_{yy}} + \dfrac{۲(-۱)^{n+۱}}{(n+\tfrac{۱}{۲})^۲\pi^۲}(ye^t - ۱) - \dfrac{۲}{(n+\tfrac{۱}{۲})\pi} y \\ F_n(y,۰) = \dfrac{۲(-۱)^{n+۱}}{(n+\tfrac{۱}{۲})^۲\pi^۲} y \\ F_n(۰,t) = t\left(\dfrac{۲}{(n+\tfrac{۱}{۲})\pi} - \dfrac{۲(-۱)^n}{(n+\tfrac{۱}{۲})^۲\pi^۲}\right) =: ta_n \\ F_n(۱,t) = -t\left(\dfrac{۲}{(n+\tfrac{۱}{۲})\pi} + \dfrac{۲(-۱)^n}{(n+\tfrac{۱}{۲})^۲\pi^۲}\right) =: -tb_n. \end{cases}$$

مرحله ۴: حل مسئله F_n: تعیین جواب مخصوص شرایط مرزی.

$$U_{n_q}(y,t) = Ay + B$$
$$U_{n_q}(\circ,t) = B = ta_n$$
$$U_{n_q}(\text{۱},t) = A + B = -tb_n \quad \Longrightarrow \quad A = -B - tb_n = -ta_n - tb_n.$$

پس

$$U_{n_q}(y,t) = -(a_n + b_n)ty + ta_n$$

که در آن

$$a_n = \frac{\text{۲}}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi} - \frac{\text{۲}(-\text{۱})^n}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}} \quad , \quad b_n = \frac{\text{۲}}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})\pi} + \frac{\text{۲}(-\text{۱})^n}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}}.$$

حال بگیرید:

$$w_n(y,t) = F_n(y,t) + (a_n + b_n)ty - ta_n$$

و مسئله را برای w_n بنویسیم و حل کنیم:

$$\begin{cases} w_{n_t} = -(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}} w_n + \text{۴}w_{n_{yy}} + c_n(ye^t - \text{۱}) - \frac{a_n+b_n}{\text{۲}} \\ \qquad + \left[\text{۱} + t(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\right]\left[(b_n + a_n)y - a_n\right] \\ w_n(y,\circ) = c_n y - a_n, \quad w_n(\circ,t) = \circ, \quad w_n(\text{۱},t) = \circ, \end{cases}$$

که در آن

$$c_n = \frac{\text{۲}(-\text{۱})^{n+\text{۱}}}{(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}\pi^{\text{۲}}} = \frac{b_n - a_n}{\text{۲}}.$$

حال

$$w_n = \sum_{m=\text{۱}}^{\infty} T_{nm}(t) \sin m\pi y$$

را در معادله و شرایط اولیه قرار دهید و ضرایب عناصر پایه را برابر قرار دهید تا به‌دست آورید:

$$\dot{T}_{nm} = -\left[(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}} + \text{۴}m^{\text{۲}}\right]T_{nm} + \frac{\text{۲}(-\text{۱})^{m+\text{۱}}}{m\pi}c_n e^t + d_{nm}t + e_{nm}$$
$$T_{nm}(\circ) = \text{۲}c_n\frac{(-\text{۱})^{m+\text{۱}}}{m\pi} - \text{۲}\frac{\text{۱} - (-\text{۱})^m}{m\pi} =: H_{nm}$$

که در آن

$$d_{nm} = ۲b_n\frac{(-۱)^{m+۱}}{m\pi}(n+\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۲a_n}{m\pi}(n+\frac{۱}{۲})^۲$$
$$e_{nm} = -\frac{۲(a_n+b_n)}{m\pi}.$$

جواب عمومی معادله $T_{nm}(t)$ را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$T_{nm}(t) = A_{nm}e^{-\left[(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\right]t} + B_{nm}e^t + C_{nm}t + D_{nm}.$$

که در آن

$$B_{nm} = \frac{۲(-۱)^{m+۱}c_n}{m\pi\left[۱+(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\right]}$$
$$C_{nm} = \frac{d_{nm}}{(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲}$$
$$D_{nm} = \frac{e_{nm}-C_{nm}}{(n+\frac{۱}{۲})^۲)+۴m^۲}$$
$$A_{nm} = -B_{nm} - D_{nm} + H_{nm}.$$

به‌این‌ترتیب جواب مسئله اولیه را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,y,t) = xt + yt + \sum_{n=۰}^{\infty}\left\{\left[a_nt-(a_n+b_n)ty\right] + \sum_{m=۱}^{\infty}T_{nm}(t)\sin m\pi y\right\}$$
$$\cdot\sin(n+\frac{۱}{۲})\pi x.$$

حل مسئله فوق که با استفاده از پایه انجام شد طولانی است. در این بخش دنبال این هستیم که راه حل ملموس‌تری ارائه دهیم. این راه حل با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی مقدور است.

تبدیلات فوریه متناهی یک نوع تبدیل انتگرالی است که مانند تبدیل لاپلاس عمل می‌کند و با حذف مشتق و تبدیل متغیر مربوط به پارامتر تعداد متغیرهای مستقل معادله دیفرانسیل را تقلیل داده و حل مسئله را مقدور می‌سازد. این‌گونه تبدیلات دارای سه خاصیت اساسی زیراند.

۱. خطی: دارای خاصیت خطی‌اند لذا بر معادلات خطی با ضرایب ثابت قابل اعمال‌اند.

۲. تبدیلات مشتقات: تبدیل مشتقات تابع بر حسب تبدیل تابع قابل بیان است. به‌این‌ترتیب که مشتق

مربوط از معادله حذف و متغیر مربوط به پارامتر تبدیل می‌شود.

۳. تبدیل معکوس: این‌گونه تبدیلات دارای تبدیل معکوس‌اند. یعنی از روی تبدیل تابع خود تابع قابل حصول است.

این‌گونه تبدیل را برای هر یک از پایه‌های اشترم-لیوویل می‌توان تعریف و استفاده نمود. در این‌جا آن را برای پایه‌های پر کاربرد بیان می‌کنیم.

الف) تبدیل فوریه سینوسی متناهی (قدیم): پایه سینوسی قدیم را روی بازه $[0,p]$ به‌صورت $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ داریم:

برای تابع $f(x)$ با دامنه $[0,p]$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته با مشتق قطعه‌به‌قطعه پیوسته تبدیل فوریه سینوسی متناهی (قدیم) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathscr{F}_s(f)=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx=F_s(n).$$

۱) این تبدیل خاصیت خطی را از انتگرال به ارث می‌برد.

۲) تبدیل معکوس را، با توجه به خاصیت پایه، به‌صورت زیر داریم.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\sin\frac{n\pi x}{p}$$

۳) تبدیل مشتقات که فقط برای مشتقات مرتبه زوج قابل بیان است را در خاصیت زیر داریم.

خاصیت ۱.۱۶. اگر f و f' روی $[0,p]$ پیوسته و f'' و f''' قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد آن‌گاه

$$\mathscr{F}_s(f'')=-\frac{n^2\pi^2}{p^2}\mathscr{F}_s(f)-\frac{2n\pi}{p^2}\Big[(-1)^n f(p)-f(0)\Big].$$

علت. با استفاده از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء نتیجه برقرار است.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_s(f'') &= \frac{۲}{p}\int_{۰}^{p} f''(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx = \frac{۲}{p}\Bigg[f'(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\Big|_{۰}^{p} \\ &- \int_{۰}^{p} f'(x)\frac{n\pi}{p}\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx\Bigg] = -\frac{۲}{p}\Bigg[f(x)\frac{n\pi}{p}\cos\frac{n\pi x}{p}\Big|_{۰}^{p} \\ &+ \int_{۰}^{p} f(x)\frac{n^{۲}\pi^{۲}}{p^{۲}}\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx\Bigg] \\ &= -\frac{n^{۲}\pi^{۲}}{p^{۲}}\mathscr{F}_s(f) - \frac{۲n\pi}{p^{۲}}\big[(-۱)^n f(p) - f(۰)\big].\end{aligned}$$

مشابهاً تبدیلات پایه‌های دیگر را به‌صورت زیر داریم:

ب) تبدیل فوریه کسینوسی متناهی (قدیم): تبدیل فوریه کسینوسی متناهی قدیم را برای $f(x)$ با دامنه $[۰,p]$ به‌صورت زیر داریم.

تبدیل فوریه کسینوسی متناهی:

$$\mathscr{F}_c(f) = \frac{۲}{p}\int_{۰}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx = F_c(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \frac{F_c(۰)}{۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} F_c(n)\cos\frac{n\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}_c(f'') = -\frac{n^{۲}\pi^{۲}}{p^{۲}}\mathscr{F}_c(f) + \frac{۲}{p}\big[(-۱)^n f'(p) - f'(۰)\big].$$

ج) تبدیل فوریه متناهی نمائی : تبدیل فوریه متناهی نمائی را برای $f(x)$ با دامنه $[-p,p]$ به‌صورت زیر است.

تبدیل فوریه متناهی:

$$\mathscr{F}(f) = \frac{۱}{۲p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx = F(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n)e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}(f')=\frac{in\pi}{p}\mathscr{F}(f)+\frac{(-1)^n}{2p}\left[f(p)-f(-p)\right].$$

د) تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید : تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید را برای $f(x)$ با دامنه $[0,p]$ به‌صورت زیر است.

تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید:

$$\mathscr{F}_{s'}(f)=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx=F_{s'}(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{s'}(n)\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}_{s'}(f'')=-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{p^2}\mathscr{F}_{s'}(f)+\frac{2}{p}\left[(-1)^n f'(p)+\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{p}f(0)\right].$$

ه) تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید : تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید را به‌صورت زیر داریم.

تبدیل فوریه کسینوسی متناهی جدید:

$$\mathscr{F}_{c'}(f)=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\,dx=F_{c'}(n)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{c'}(n)\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}_{c'}(f'')=-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{p^2}\mathscr{F}_{c'}(f)-\frac{2}{p}\left[f'(0)-\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{p}(-1)^n f(p)\right].$$

تذکر. ۱) تبدیل مشتقات مرتبه بالاتر با استقرا از روی تبدیل مشتق فوق قابل تعیین است.

۲) برای هر پایه دیگر به‌صورت مشابه می‌توان تبدیل فوریه متناهی تعریف کرد.

۳) هر مسئله که با پایه یکی از تبدیلات متناهی فوق حل شود با آن تبدیل نیز قابل حل است.

۴) حل با تبدیل نیاز به u_q ندارد و لیکن می‌بایستی فرمول تبدیل مشتق را بدانیم یا محاسبه کنیم.

۵) جای تبدیل نسبت به یک متغیر و مشتق نسبت به متغیر دیگر را می‌توان عوض کرد.

مثال ۱.۲۲. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{txx} + u + xe^t, & \circ \le x \le \pi,\ t \ge \circ \\ u(x,\circ) = x, \\ u(\circ,t) = e^t, \quad u(\pi,t) = \circ \end{cases}$$

حل. شرایط مرزی دیریکله و $p = \pi$ است. پس حل با پایه سینوسی قدیم یا تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم مقدور است.

از مسئله تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم می‌گیریم، $p = \pi$.

$$\mathscr{F}_s(u(x,t)) = \frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi u(x,t)\sin nx\,dx =: U(n,t) =: U(t) =: U.$$

جای تبدیل و مشتق عوض می‌شود یعنی:

$$\mathscr{F}_s(u_t) = \Big(\mathscr{F}_s(u)\Big)_t = U_t.$$

تبدیل مشتقات به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}_s(f'') = -\frac{n^۲\pi^۲}{p^۲}\mathscr{F}_s(f) - \frac{۲n\pi}{p^۲}\big[(-۱)^n f(p) - f(\circ)\big], \quad p = \pi \\ &\mathscr{F}_s(u_{xx}) = -n^۲\mathscr{F}_s(u) + \frac{۲n}{\pi}e^t = -n^۲U(n,t) + \frac{۲n}{\pi}e^t \\ &\mathscr{F}_s(u_{txx}) = \Big(\mathscr{F}_s(u_{xx})\Big)_t = -n^۲U_t + \frac{۲n}{\pi}e^t \\ &\mathscr{F}_s(xe^t) = e^t\mathscr{F}_s(x) = e^t\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\pi x\sin nx\,dx = \frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}e^t. \end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب با تبدیل گرفتن از مسئله به‌دست می‌آوریم:

$$U_t = -n^2 U - n^2 U_t + \frac{4n}{\pi}e^t + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}e^t + U$$
$$U(0) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

یا به‌عبارت دیگر، برای هر n، مسئله معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اوّل با ضرایب ثابت و غیر همگن زیر را داریم.

$$\begin{cases}(1+n^2)U_t + (n^2-1)U = \left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right]e^t \\ U(0) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\end{cases}$$

برای حل آن داریم.

$$U(t) = A_n e^{\frac{1-n^2}{1+n^2}t} + \frac{1}{2n^2}\left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right]e^t$$
$$U(0) = A_n + \frac{1}{2n^2}\left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right] = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

پس

$$A_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{2}{n\pi}.$$

به‌این‌ترتیب با تبدیل معکوس گرفتن به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\left(1-\frac{1}{2n^2}\right) - \frac{2}{n\pi}\right]e^{\frac{1-n^2}{1+n^2}t} + \frac{1}{2n^2}\left[\frac{4n}{\pi} + \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right]e^t\right\}\sin nx.$$

مثال ۱.۲۳. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{cases}u_t = u_{xx} + 4u_{yy} + xye^t, & 0 \le x,y \le 1,\ t \ge 0 \\ u(x,y,0) = xy, & \\ u(0,y,t) = yt, \quad u_x(1,y,t) = t, \quad u(x,0,t) = t, \quad u(x,1,t) = 0 & \end{cases}$$

حل. تبدیل فوریه متناهی مناسب متغیر x، تبدیل فوریه متناهی سینوسی جدید و تبدیل فوریه مناسب y، تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم است. ابتدا نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی متناهی جدید بگیرید.

$$\mathscr{F}_{s'}(u(x,y,t)) = ۲\int_{۰}^{۱} u(x,y,t)\sin(n+\tfrac{۱}{۲})\pi x\,dx =: U(n,y,t) =: U(t).$$

حال از مسئله تبدیل بگیریم.

$$U_t = -(n+\tfrac{۱}{۲})^۲U + ۴U_{yy} + ye^t\mathscr{F}_{s'}(x) + ۲\Big[(-۱)^n t + (n+\tfrac{۱}{۲})\pi yt\Big]$$

$$U(n,y,۰) = y\mathscr{F}_{s'}(x),$$

$$U(n,۰,t) = t\mathscr{F}_{s'}(۱), \quad U(n,۱,t) = ۰$$

حال از این مسئله نسبت به y، تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم بگیرید.

$$\mathscr{F}_s(U(n,y,t)) = ۲\int_{۰}^{۱} U(n,y,t)\sin m\pi y\,dy = W(n,m,t) =: W(t)$$

$$W_t = -(n+\tfrac{۱}{۲})^۲W - ۴m^۲\pi^۲W + ۸m\pi t\mathscr{F}_{s'}(۱) + e^t\mathscr{F}_{s'}(x)\mathscr{F}_s(y)$$
$$+ ۲\Big[(-۱)^n t\mathscr{F}_s(۱) + (n+\tfrac{۱}{۲})\pi\mathscr{F}_s(y)t\Big]$$

$$W(۰) = \mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}_{s'}(x)$$

$$W(t) = A_{nm}e^{-\left[(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\pi^۲\right]t} + B_{nm}e^t + C_{nm}t + D_{nm}$$

که در آن

$$B_{nm} = \frac{\mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}_{s'}(x)}{۱+(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\pi^۲}$$

$$C_{nm} = \frac{۸m\pi\mathscr{F}_{s'}(۱) + ۲(-۱)^n t\mathscr{F}_s(۱) + (۲n+۱)\pi\mathscr{F}_s(y)}{(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\pi^۲}$$

$$D_{nm} = -\frac{C_{nm}}{(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\pi^۲}$$

$$A_{nm} = -B_{nm} - D_{nm} + \mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}_{s'}(x).$$

به‌این‌ترتیب جواب مسئله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u(x,y,t) = \sum_{n=۰}^{\infty}\sum_{m=۱}^{\infty}\left\{A_{nm}e^{-\left[(n+\frac{۱}{۲})^۲+۴m^۲\pi^۲\right]t} + B_{nm}e^t + C_{nm}t + D_{nm}\right\}$$
$$\cdot\sin(n+\tfrac{۱}{۲})\pi x\sin m\pi y.$$

حال به محاسبه تبدیلات ظاهر شده در مسئله می‌پردازیم.

$$\mathscr{F}_{s'}(x) = ۲\int_{\circ}^{۱} x\sin(n+\tfrac{۱}{۲})\pi x\,dx = \frac{۲(-۱)^n}{(n+\frac{۱}{۲})^۲\pi^۲}$$
$$\mathscr{F}_{s'}(۱) = ۲\int_{\circ}^{۱} \sin(n+\tfrac{۱}{۲})\pi x\,dx = \frac{۲}{(n+\frac{۱}{۲})\pi}$$
$$\mathscr{F}_{s}(y) = ۲\int_{\circ}^{۱} y\sin m\pi y\,dy = \frac{۲(-۱)^{m+۱}}{m\pi}$$

به‌این‌ترتیب حل کامل می‌شود.

تذکر. این مثال، ۲۳.۱، همان مثال ۲۱.۱ است. روش حل قبلی با پایه بوده است که طولانی است و این روش حل با تبدیلات فوریه متناهی کوتاه‌تر است.

تذکر. برتری تبدیلات فوریه متناهی نسبت به پایه استفاده از تبدیلات در حل مسائل حاوی تابع دلتا و دستگاه معادلات پاره‌ای است. برای تابع دلتا سری فوریه وجود ندارد لیکن هر تبدیل انتگرالی این تابع مانند تبدیل لاپلاس موجود است. همچنین از هر تبدیل انتگرالی از جمله تبدیلات فوریه متناهی مانند تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل به‌خصوص معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌توان استفاده نمود. این مطالب در مثال زیر نشان داده خواهد شد.

مثال ۲۴.۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} - ۲v_{txx} + xt \qquad\qquad \circ < x < \pi,\ t > \circ\\ &v_t = ۲u_{xx} + v_{xx} + u + t\,\delta(x - \frac{\pi}{۲})\\ &u(x,\circ) = x, \quad v(x,\circ) = ۱,\\ &u(\circ,t) = t, \quad u(\pi,t) = e^t, \quad v(\circ,t) = t, \quad v(\pi,t) = \circ. \end{aligned}$$

حل. شرایط مرزی هر دو تابع مجهول دیریکله است و در معادلات مشتق از مرتبه فرد نسبت به x برای این توابع مجهول موجود نیست. پس هر دو تابع مجهول را برای t ثابت نسبت به x برحسب پایه سینوسی قدیم با $p = \pi$ یعنی $\{\sin nx\}_{n=۱}^{\infty}$ می‌توان بسط داد. به‌عبارت دیگر از این معادلات می‌توان تبدیل

فوریه سینوسی متناهی قدیم گرفت. بگیرید

$$\mathscr{F}_s(u(x,t)) = U(n,t) = U(t) = U,$$
$$\mathscr{F}_s(v(x,t)) = V(n,t) = V(t) = V.$$

با گرفتن تبدیل فوریه سینوسی متناهی قدیم از این دستگاه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
U_t &= -n^۲U - \frac{۲n}{\pi}[(-۱)^n e^t - t] - ۲\,[-n^۲V - \frac{۲n}{\pi}(-t)]_t + t\frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n},\\
V_t &= -۲n^۲U - \frac{۴n}{\pi}[(-۱)^n e^t - t] - n^۲V + \frac{۲n}{\pi}t + U + \frac{۲}{\pi}t\sin\frac{n\pi}{۲}\\
U(۰) &= \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}, \quad V(۰) = \frac{۲}{n\pi}(۱-(-۱)^n).
\end{aligned}$$

برای حل این دستگاه معادله دیفرانسیل عادی از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم. بگیرید

$$\mathscr{L}U = W, \quad \mathscr{L}V = Z.$$

حال از مسئله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{aligned}
sW - \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} &= -n^۲W - \frac{۲n}{\pi}\Big[(-۱)^n\frac{۱}{s-۱} - \frac{۱}{s^۲}\Big] - ۲\Big[-n^۲sZ + \frac{۲n}{\pi}\times\\
&\qquad (۱-(-۱)^n)\Big] + \frac{۴n}{\pi}\frac{۱}{s} + (-۱)^{n+۱}\frac{۲}{ns^۲},\\
sZ - \frac{۲}{n\pi}(۱-(-۱)^n) &= -۲n^۲W - \frac{۴n}{\pi}\Big[(-۱)^n\frac{۱}{s-۱} - \frac{۱}{s^۲}\Big] - n^۲Z\\
&\qquad + \Big[\frac{۲n}{\pi} + \frac{۲}{\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}\Big]\frac{۱}{s^۲} + W.
\end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned}
(s+n^۲)W - ۲n^۲sZ &= \frac{A}{s-۱} + \frac{B}{s^۲} + \frac{C}{s} + D,\\
(۲n^۲-۱)W + (s+n^۲)Z &= \frac{a}{s-۱} + \frac{b}{s^۲} + c,
\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}
&A = \frac{۲n(-۱)^{n+۱}}{\pi}, B = \frac{۲n}{\pi} + \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n}, C = \frac{۴n}{\pi},\\
&D = \frac{۲(-۱)^{n+۱}}{n} - \frac{۴n}{\pi}(۱-(-۱)^n),\\
&a = \frac{۴n(-۱)^{n+۱}}{\pi}, b = \frac{۴n}{\pi} + \Big[\frac{۲n}{\pi} + \frac{۲}{\pi}\sin\frac{n\pi}{۲}\Big], c = \frac{۲}{n\pi}(۱-(-۱)^n).
\end{aligned}$$

از حل دستگاه فوق به‌دست می‌آوریم

$$W = \frac{\gamma_1}{s-1} + \frac{\gamma_2}{s^2} + \frac{\gamma_3}{s} + \frac{\gamma_4}{s+\alpha_n} + \frac{\gamma_5}{s+\beta_n},$$
$$W = \frac{\delta_1}{s-1} + \frac{\delta_2}{s^2} + \frac{\delta_3}{s} + \frac{\delta_4}{s+\alpha_n} + \frac{\delta_5}{s+\beta_n}.$$

که در آن $\alpha_n = 2n^4 + n^2\sqrt{4n^4-1}$ و $\alpha_n = 2n^4 - n^2\sqrt{4n^4-1}$. همچنین γ_j ها و δ_j ها مقادیری هستند که برحسب مقادیر A، B، C، D، a، b و c محاسبه می‌گردند. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$U(n,t) = \gamma_1 e^t + \gamma_2 t + \gamma_3 + \gamma_4 e^{-\alpha_n t} + \gamma_5 e^{-\beta_n t},$$
$$V(n,t) = \delta_1 e^t + \delta_2 t + \delta_3 + \delta_4 e^{-\alpha_n t} + \delta_5 e^{-\beta_n t}.$$

و جواب نهایی

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U(n,t)\sin nt,\ v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V(n,t)\sin nt.$$

تمرین ۸.۱

مسائل زیر را با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی حل کنید.

۱. $u_{tt} = 4u_{xx} + 3e^{t+x}, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = e^x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = 1$$

۲. $u_t = u_{xx} + xt^2, \qquad -\pi \leq x \leq \pi,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = e^x,$$

$$u(-\pi,t) = u(\pi,t) + t, \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)$$

۳. $u_{tt} + u_{xxxx} = xt, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = t, \quad u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0$$

۴. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xyz, \qquad 0 \leq x,y,z \leq 1$

$$u(0,y,z) = yz, \quad u_x(1,y,z) = 0,$$

$$u_y(x,0,z) = xz, \quad u(x,1,z) = 0,$$

$$u(x,y,0) = xy, \quad u(x,y,1) = 0$$

۵. $u_t = u_{xx} + u_{xxt} - u_{xxyy} + xyt, \qquad 0 \leq x,y \leq 1,\ t \geq 0$

$$u(x,y,0) = xy^2,$$

$$u\big|_{x=0} = yt, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = xt, \quad u_y\big|_{y=1} = 0$$

۶. $u_{tt} = u_{xx} + u_{ttxx} - u + t\delta(x - \frac{\pi}{4}), \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u(0,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = 1.$$

۷. $u_t = u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} - ۲u + xyt, \qquad ۰ < x, y < \pi, \ t > ۰$

$u(x,y,۰) = y\delta(x - \frac{\pi}{۳}), \quad u_t(x,y,۰) = x\delta(x - \frac{\pi}{۴}),$

$u_x(۰,y,t) = y\delta(t - ۱), \quad u(\pi,y,t) = yt,$

$u_y(x,۰,t) = t\delta(x - \frac{\pi}{۲}), \quad u(x,\pi,t) = t^۲\delta(x - \frac{\pi}{۵}).$

۸. $u_{tt} = u_{xx} + ۲v_{xx} - v + xt, \qquad ۰ < x < \pi, \ t \geq ۰$

$v_{tt} = ۳u_{xx} + v_{xx} - u - xt^۲,$

$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = ۱, \quad v(x,۰) = ۰, \quad v_t(x,۰) = x,$

$u(۰,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = ۰, \quad v(۰,t) = ۱, \quad v_x(\pi,t) = t.$

۹.۱ روش‌های حل

در بخش‌های گذشته سه روش برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای معرفی کردیم.

۱) روش حل با استفاده از پایه

۲) روش حل با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی

۳) روش حل با استفاده از سری فوریه دوگانه و چندگانه

در این بخش مروری بر آنچه گذشت خواهیم داشت. اگرچه بعضی از مسائل با هر سه روش قابل حل است لیکن بعضی از این روش‌ها برای حل بعضی از مسائل مناسب‌تر است. تشخیص روش مناسب یا بهترین روش نیز در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۹.۱ روش حل با پایه

۱. با استفاده از سری فوریه سه نوع پایه ساختیم:

آ) پایه سینوسی قدیم $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=۱}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $۰ \leq x \leq p$، شرایط مرزی دیریکله همگن یعنی $u\Big|_{x=۰} = ۰$ و $u\Big|_{x=p} = ۰$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

ب) پایه کسینوسی قدیم $\left\{\cos\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0\le x\le p$، شرایط مرزی نیومن همگن یعنی $u_x\big|_{x=0}=0$ و $u_x\big|_{x=p}=0$ نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

ج) پایه نمایی یا مختلط $\left\{e^{\frac{in\pi x}{p}}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $-p\le x\le p$ و شرایط مرزی متناوب همگن یعنی $u\big|_{x=-p}-u\big|_{x=p}=0$ و $u_x\big|_{x=-p}-u_x\big|_{x=p}$ است.

۱. با استفاده از مسائل اشترم-لیوویل دو نوع پایه دیگر هم ساختیم:

آ) پایه سینوسی جدید $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0\le x\le p$، شرایط مرزی روبین چپ همگن یعنی $u\big|_{x=0}=0$ و $u_x\big|_{x=p}$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

ب) پایه کسینوسی جدید $\left\{\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{p}\right\}_{n=0}^{\infty}$. این پایه مناسب حل مسائل با شرایط: $0\le x\le p$، شرایط مرزی روبین راست همگن یعنی $u_x\big|_{x=0}=0$ و $u\big|_{x=p}$ و نسبت به x در معادله مشتق از مرتبه فرد نباشد.

تذکر. اگر شرایط مرزی غیرهمگن باشد، یعنی یکی از مقدار مرزی داده شده برابر صفر نباشد، ابتدا تابع u_q را طوری به‌دست می‌آوریم تا در شرایط مرزی غیرهمگن صدق کند. سپس تغییر تابع مجهول $u=u_q+v$ را می‌دهیم و مسئله را برای v می‌نویسیم. دراین صورت شرایط مرزی برای v همگن است و با پایه حل می‌شود.

مثال ۱.۲۵ (ساده‌ترین مثال موج یک بعدی). مطلوبست حل مسئله

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+u+x^2,\qquad 0\le x\le 1,\ t\ge 0$$
$$u(x,0)=x,\quad u_t(x,0)=0,\quad u_x(0,t)=0,\quad u(1,t)=1.$$

حل. قدم اول: تعیین ابزار حل مسئله. برای این کار ابتدا به دامنه متغیر مکان یعنی x نگاه می‌کنیم. در اینجا $0\le x\le 1$. پس این مسئله با استفاده از پایه قابل حل است. پس ابزار حل پایه است. حال ببینیم از پایه‌های پنج‌گانه می‌توانیم استفاده کنیم یا خیر. برای این کار به شرایط مرزی مسئله نسبت به x نگاه می‌کنیم. شرایط مرزی در اینجا $u\big|_{x=1}=1$ و $u_x\big|_{x=0}=0$ یعنی شرایط مرزی روبین راست با $p=1$،

لیکن غیرهمگن است. پس پایه کسینوسی جدید با $p = ۱$ مناسب شرایط مرزی مسئله همگن این مسئله است. یعنی $\left\{ \cos(n + \frac{۱}{۲})\pi x \right\}_{n=\circ}^{\infty}$. توجه کنید در معادله مشتق از مرتبه فرد نسبت به x نداریم. پس این پایه مسئله را حل می‌کند. البته این پایه مناسب شرایط مرزی همگن است.

قدم دوم: تعیین u_q. u_q تابعی است که در شرایط مرزی غیرعمگن مسئله صدق می‌کند. برای این شرایط مرزی بهترین انتخاب به‌صورت $u_q = Ax + B$ است. پس باید $u_q\big|_{x=۱} = ۱$ و $u_{q_x}\big|_{x=\circ} = \circ$. درنتیجه

$$u_{q_x}\big|_{x=\circ} = A = \circ \quad \Rightarrow \quad A = \circ$$
$$u_q\big|_{x=۱} = A + B = ۱ \quad \Rightarrow \quad B = ۱$$

پس،

$$u_q = u_q(x,t) = ۱.$$

قدم سوم: تغییر تابع مجهول برای تبدیل شرایط مرزی غیرهمگن به همگن. پس باید بگیریم:

$$u = u_q + v = ۱ + v$$

و مسئله را برای v بنویسیم. برای این منظور در مسئله به‌جای u قرار می‌دهیم $۱ + v$. در این صورت مسئله v می‌شود:

$$v_{tt} = c^۲ v_{xx} + v + x^۲ + ۱, \qquad \circ \leq x \leq ۱,\ t \geq \circ$$
$$v(x,\circ) = x - ۱, \quad v_t(x,\circ) = \circ, \quad v_x(\circ,t) = \circ, \quad v(۱,t) = \circ.$$

شرایط مرزی برای v همگن شده‌است. درنتیجه، تعیین جواب به‌صورت زیر مقدور است:

$$v(x,t) = \sum_{n=\circ}^{\infty} T_n(t) \cos(n + \frac{۱}{۲})\pi x$$

قدم چهارم: حل مسئله v.

آ) جواب فوق را در معادله قرار می‌دهیم تا $T_n(t)$ معلوم شود.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\ddot{T}_n(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}c^2(n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2T_n(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})+\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\\&+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\end{aligned}$$

در اینجا سری آخر بسط x^2+1 برحسب این پایه است، پس

$$c_n=\frac{2}{1}\int_0^1(x^2+1)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx$$

(محاسبه این انتگرال را می‌گذاریم برای آخر کار .)

تمام جملات در تساوی فوق برحسب یک پایه است، پس باید داشته باشیم:

$$\ddot{T}_n+\left(c^2(n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2-1\right)T_n=c_n$$

بگیرید:

$$\alpha_n^2:=c^2(n+\tfrac{1}{2})^2\pi^2-1$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت زیر است که A_n و B_n ثابت‌های جواب عمومی هستند.

$$T_n(t)=A_n\cos\alpha_nt+B_n\sin\alpha_nt+\frac{c_n}{\alpha_n^2}$$

به‌این‌ترتیب جواب عمومی مسئله v می‌شود:

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\alpha_nt+B_n\sin\alpha_nt+\frac{c_n}{\alpha_n^2}\right)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x$$

ب) اعمال شرایط اولیه v.

شرایط اولیه را برای v به‌صورت زیر داریم:

$$v(x,0)=x-1,\qquad v_t(x,0)=0.$$

آن را بر روی این جواب عمومی اعمال می‌کنیم.

$$v(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n+\frac{c_n}{\alpha_n^2}\right)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x=x-1$$

پس باید

$$A_n + \frac{c_n}{\alpha_n^2} = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx$$

از طرفی

$$v_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n B_n \cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x = 0$$

درنتیجه، $B_n = 0$. همچنین

$$A_n = -\frac{c_n}{\alpha_n^2} + 2\int_0^1 (x-1)\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\,dx.$$

با محاسبه انتگرال مربوط به c_n و این انتگرال مقدار A_n به‌دست می‌آید. از قرار دادن این A_n در سری $v(x,t)$ تابع $v(x,t)$ کاملاً مشخص می‌شود و جواب مسئله اولیه یعنی $u(x,t)$ به‌صورت زیر است:

$$u(x,t) = u_q + v = 1 + v(x,t).$$

تذکر. اگر متغیر مکان x یک مسئله دارای دامنه $0 \leq x \leq 1$ و عناصر پایه $\left\{\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\right\}_{n=0}^{\infty}$ در شرایط مرزی آن مسئله صدق کند و مشتق نسبت به x از مرتبه فرد در آن نباشد، با قدم‌های مشابه حل آن مسئله مقدور است.

مثال ۲۶.۱. مطلوبست حل مسئله

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{ttxx} + u_{xxxx} + 4u = xt, \qquad\qquad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0\\
&u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = x,\\
&u_x(0,t) = t, \quad u_{xxx}(0,t) = 6, \quad u(1,t) = 1, \quad u_{xx}(1,t) = 0.
\end{aligned}$$

حل. قدم اول: انتخاب پایه.

پایه کسینوسی جدید با $p = 1$ در شرایط مرزی همگن‌شده این مسئله صدق می‌کند. پس پایه $\left\{\cos(n+\tfrac{1}{2})\pi x\right\}_{n=0}^{\infty}$ مناسب شرایط مرزی است. در مسئله نسبت به x هیچ نوع مشتق فردی نداریم. درنتیجه این پایه مسئله را حل می‌کند .

قدم دوم: تعیین $u_q(x,t)$. این u_q باید در چهار معادله از شرایط مرزی صدق کند. پس باید در u_q پیشنهادی ۴ تا پارامتر باشد که بتوان از آن‌ها این شرایط را برقرار کرد. برای این شرایط مرزی بهترین u_q

به‌صورت زیر است:

$$u_q(x,t) = Ax^۳ + Bx^۲ + Cx + D$$

$$u_{q_x}(۰,t) = ۳Ax^۲ + ۲Bx + C\big|_{x=۰} = t \quad \Rightarrow \quad C = t$$

$$u_{q_{xxx}}(۰,t) = ۶A = ۶ \quad \Rightarrow \quad A = ۱$$

$$u_q(۱,t) = ۱ \quad \Rightarrow \quad A+B+C+D = ۱ \quad \Rightarrow \quad B+D = -t$$

$$u_{q_{xx}}(۱,t) = ۶A + ۲B = ۶ + ۲B = ۰ \quad \Rightarrow \quad B = -۳$$

پس، $D = ۳ - t$، $C = t$، $B = -۳$ و $A = ۱$ و

$$u_q = x^۳ - ۳x^۲ + tx + (۳ - t)$$

قدم سوم: تغییر تابع مجهول و تبدیل شرایط مرزی غیرهمگن به همگن. حال بگیرید:

$$u = u_q + v = x^۳ - ۳x^۲ + tx + (۳-t) + v$$

و مسئله را برای v بنویسید. شرایط مرزی برای v همگن می‌شود. مسئله برای v به‌صورت زیر است:

$$v_{tt} - v_{ttxx} + v_{xxxx} + ۴v = ۴x^۲(۳-x) + ۶x + t(۴ - ۳x) - ۱۸$$

$$v(x,۰) = -x^۳ + ۳x^۲ + x - ۳, \quad v_t(x,۰) = ۱, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$$

$$v_x(۰,t) = ۰, \quad v_{xxx}(۰,t) = ۰, \quad v(۱,t) = ۰, \quad v_{xx}(۱,t) = ۰.$$

قدم چهارم: حل مسئله v. جواب مسئله v را برحسب پایه فوق با ضرایب تابعی از t می‌نویسیم.

$$v(x,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} T_n(t) \cos(n + \tfrac{۱}{۲})\pi x$$

آ) این جواب را در معادله قرار می‌دهیم و برای خلاصه‌نویسی $\sum$ و $\cos(n+\frac{۱}{۲})\pi x$ را نمی‌نویسیم.

$$\ddot{T}_n + (n + \tfrac{۱}{۲})^۲\pi^۲\ddot{T}_n + (n + \tfrac{۱}{۲})^۴\pi^۴ T_n + ۴T_n = c_n + d_n t$$

که در آن

$$c_n = \frac{۲}{۱}\int_۰^۱ \left(۴x^۲(۳-x) + ۶x - ۱۸\right)\cos(n + \tfrac{۱}{۲})\pi x\, dx$$

$$d_n = \frac{۲}{۱}\int_۰^۱ (۴ - ۳x)\cos(n + \tfrac{۱}{۲})\pi x\, dx$$

(محاسبه انتگرال‌ها برای آخر کار است.) درنتیجه، معادله T_n می‌شود:

$$\ddot{T} + \frac{(n+\frac{1}{2})^4\pi^4 + 4}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}T_n = \frac{c_n}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} + \frac{d_n}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}t$$

جواب عمومی این معادله می‌شود:

$$T_n(t) = A_n\cos\alpha_n t + B_n\sin\alpha_n t + \frac{C_n}{{\alpha_n}^2} + \frac{D_n}{{\alpha_n}^2}t$$

به‌طوری‌که

$${\alpha_n}^2 := \frac{(n+\frac{1}{2})^4\pi^4 + 4}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}, \qquad C_n := \frac{c_n}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

$$D_n := \frac{d_n}{1+(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

به‌این‌ترتیب، جواب مسئله v را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n\cos\alpha_n t + B_n\sin\alpha_n t + \frac{C_n}{{\alpha_n}^2} + \frac{D_n}{{\alpha_n}^2}t\Big)\cos(n+\frac{1}{2})\pi x$$

ب) اکنون شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم تا A_n و B_n به‌دست آید.

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n + \frac{C_n}{{\alpha_n}^2}\Big)\cos(n+\frac{1}{2})\pi x = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

درنتیجه،

$$A_n + \frac{C_n}{{\alpha_n}^2} = \frac{2}{1}\int_0^1\Big(-x^3+3x^2+x-3\Big)\cos(n+\frac{1}{2})\pi x\,dx$$

$$v_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\alpha_n B_n + \frac{D_n}{{\alpha_n}^2}\Big)\cos(n+\frac{1}{2})\pi x = 1.$$

پس

$$\alpha_n B_n + \frac{D_n}{{\alpha_n}^2} = \frac{2}{1}\int_0^1\cos(n+\frac{1}{2})\pi x\,dx$$

با محاسبه انتگرال‌های c_n و d_n و دو انتگرال فوق A_n و B_n به‌دست می‌آید. از قرار دادن آن‌ها در سری $v(x,t)$، این تابع مشخص و جواب مسئله اولیه می‌شود.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_q(x,t) + v(x,t) \\ &= x^3 - 3x^2 + tx + (3-t) + v(x,t) \end{aligned}$$

تمرین ۹.۱

مسائل زیر را با استفاده از پایه مناسب حل کنید.

۱. $u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} - u + xt, \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u(0,t) = t, \quad u(\pi,t) = 0.$$

۲. $u_t = u_{xx} + 2\alpha u_x - u + xt, \qquad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_x(0,t) = t, \quad u_x(1,t) = 1.$$

بگیرید: $u = ve^{-\alpha x}$.

۳. $u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} = xy, \qquad 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$

$$u(0,y) = y, \quad u_x(\pi,y) = 0, \quad u_y(x,0) = x, \quad u(x,1) = 1.$$

۴. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxtt} - u_{xx} + u = xt \qquad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1, \quad u_{xx}(0,t) = t, \quad u_{xxx}(\pi,t) = 0$$

۵. $u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \qquad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$

$$u\Big|_{x^2+y^2=1} = x^2y^2, \qquad u\Big|_{x^2+y^2=4} = 0.$$

۶. $u_{xx} + u_{yy} = xy, \qquad x^2 + y^2 < 1,$

$$u\Big|_{x^2+y^2=1} = x + y, \qquad |u| < \infty.$$

۲.۹.۱ روش حل با تبدیلات فوریه متناهی

از هر پایه یک تبدیل فوریه متناهی می‌توان ساخت. به‌این‌ترتیب که دنباله ضرایب فوریه را برای هر تابع بتوان تبدیل فوریه آن تابع نسبت پایه مربوط در نظر گرفت و نسبت فوریه آن تابع را نسبت به آن پایه بتوان تبدیل معکوس منظور کرد. پایه سینوسی قدیم یعنی $\left\{\sin\frac{n\pi x}{p}\right\}_{n=1}^{\infty}$ را در بگیرید. اگر $f(x)$ با دامنه

$[\circ, p]$ باشد، آنگاه

$$b_n = \frac{۲}{p}\int_{\circ}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$
$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}.$$

تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم را به‌صورت زیر تعریف کردیم:

$$\mathscr{F}_s(f) = \int_{\circ}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx := F_s(n)$$

که $F_s(n)$ همان b_n است. تبدیل معکوس را هم به‌صورت زیر داریم:

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} F_s(n)\sin\frac{n\pi x}{p}$$

که همان سری فوریه سینوسی قدیم است. این تبدیل دارای این خاصیت اساسی است که تبدیلات مشتقات از مرتبه زوج تابع را می‌توان برحسب تبدیل خود تابع بیان کرد و این کار با استفاده از انتگرال جزبه‌جز میسر است. در این مورد داریم:

$$\mathscr{F}_s(f'') = -\frac{n^۲\pi^۲}{p^۲}\mathscr{F}_s(f) - \frac{۲n\pi}{p^۲}\Big[(-۱)^n f(p) - f(\circ)\Big].$$

نکته اساسی در این تبدیلات این است که هر مسئله اگر مثلاً با پایه سینوسی قدیم حل شود با تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم نیز حل می‌شود. در روش حل تفاوت اساسی است.

۱. برای حل با پایه باید u_q را به‌دست آورد و تغییر تابع مجهول $u = u_q + v$ داد و مسئله را برحسب v نوشت تا شرایط مرزی همگن گردد و حل با پایه قابل اعمال باشد. در حل با تبدیل نیاز به محاسبه u_q و تغییر تابع مجهول نیست.

۲. وقتی از پایه استفاده می‌کنیم و سری فوریه را در معادله قرار می‌دهیم برای جایگذاری این سری به‌جای جملات مشتق از این سری باید مشتق بگیریم. لیکن وقتی از تبدیل استفاده می‌کنیم عملاً از جملات انتگرال گرفته می‌شود و شرایط مرزی در تبدیل مشتق ظاهر می‌گردد و نیاز به u_q نمی‌شود.

۳. اگر سری فوریه توابع داده شده در مسئله موجود باشد، این مسئله هم با پایه و هم با تبدیل فوریه قابل حل است. لیکن اگر سری فوریه تابعی موجود نباشد، حل با پایه نامقدور لیکن با تبدیل امکان حل با تبدیل فوریه متناهی موجود است. حال به حل مسائل با تبدیل می‌پردازیم.

مثال ۲۷.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر:

$$u_t = u_{xx} + u_{xxt} - u + x + e^t\delta(x - \tfrac{\pi}{۲}) \qquad ۰ \le x \le \pi,\ t \ge ۰$$
$$u(x,۰) = x, \quad u(۰,t) = t, \quad u(\pi,t) = ۰.$$

حل. چون تابع δ نسبت به x در این معادله ظاهر شده است و این تابع فاقد سری فوریه است پس این مسئله و مسائل حاوی تابع دلتا با استفاده از تبدیلات فوریه قابل‌حل است. در مورد تابع دلتا خاصیت زیر را داریم:

خاصیت ۱۷.۱. اگر $f(x)$ روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $\alpha \in (a,b)$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\delta(x-\alpha)\,dx = f(\alpha)$$

که در اینجا a و یا b می‌تواند $\pm\infty$ باشد.

حال برای حل مسئله، از مسئله تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم می‌گیریم. داریم $p=\pi$. برای این منظور طرفین معادله را در $\frac{۲}{\pi}\sin nx$ ضرب و از ۰ تا π انتگرال می‌گیریم. برای ساده‌نویسی می‌نویسیم:

$$\mathscr{F}_s(u(x,t)) = U(n,t) := U(t)$$

در این‌صورت:

۱. از u نسبت به t مشتق و نسبت به x انتگرال می‌گیریم.

$$\mathscr{F}_s(u_t) = U_t$$

۲. دو بار نسبت به x مشتق و سپس انتگرال می‌گیریم.

$$\mathscr{F}_s(u_{xx}) = -n^۲U + \frac{۲n}{\pi}t$$

با استفاده از تبدیل مشتق مرتبه دوم که فرمول آنرا در بالا داریم، تساوی فوق را به‌دست می‌آوریم.

۳. همچنین

$$\mathscr{F}_s(u_{xxt}) = \left(\mathscr{F}_s(u_{xx})\right)_t = -n^۲U_t + \frac{۲n}{\pi}$$

.۴

$$\mathscr{F}_s\Big(e^t\delta(x-\frac{\pi}{۲})\Big)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}\delta(x-\frac{\pi}{۲})e^t\sin nx\,dx=\frac{۲}{\pi}e^t\sin\frac{n\pi}{۲}$$

.۵

$$\mathscr{F}_s(x)=\frac{۲}{\pi}\int_۰^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

حال در معادله تبدیل گرفته‌شده قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}U_t&=-n^۲U-n^۲U_t-U+\frac{۲n}{\pi}t+\frac{۲n}{\pi}+\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}+\frac{۲}{\pi}e^t\sin\frac{n\pi}{۲}\\U_t+U&=\frac{۱}{۱+n^۲}\Big(\frac{۲n}{\pi}t+\frac{۲n}{\pi}+\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}+\frac{۲}{\pi}e^t\sin\frac{n\pi}{۲}\Big)\\&=B_nt+C_n+D_ne^t\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$B_n:=\frac{۲n}{\pi(۱+n^۲)},\quad C_n:=\frac{۱}{۱+n^۲}\Big(\frac{۲n}{\pi}+\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}\Big),$$
$$D_n:=\frac{۲}{\pi(۱+n^۲)}\sin\frac{n\pi}{۲}.$$

اگر از شرط اولیه تبدیل فوریه متناهی سینوسی قدیم بگیریم، به‌دست می‌آوریم:

$$U(۰)=\mathscr{F}_s(u(x,۰))=\mathscr{F}_s(x)=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق عبارتست از

$$U(n,t)=A_ne^{-t}+B_nt+C_n-B_n+\frac{۱}{۲}D_ne^t$$

که در آن A_n ثابت جواب عمومی است. با اعمال شرط اولیه حاصل می‌شود:

$$U(n,۰)=A_n+C_n-B_n+\frac{۱}{۲}D_n=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}$$

پس

$$A_n=\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}-C_n+B_n-\frac{۱}{۲}D_n$$

به‌این‌ترتیب

$$U(n,t)=\Big[\frac{۲}{n}(-۱)^{n+۱}-C_n+B_n-\frac{۱}{۲}D_n\Big]e^{-t}+B_nt+C_n-B_n+\frac{۱}{۲}D_ne^t$$

و جواب مسئله می‌شود:

$$u(x,t) = \sum_{n=۱}^{\infty} U(n,t) \sin n\pi$$

تذکر. ۱) اگر با پایه سینوسی قدیم حل کنیم و بگیریم:

$$\delta(x - \frac{\pi}{۲}) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{\pi} \sin \frac{n\pi}{۲} \sin nx$$

همین جواب به‌دست می‌آید. لیکن این تساوی معنی ندارد و برقرار نیست. اما برای تابع دلتا کلیه تبدیلات موجود و بامعنی است.

۲) اگر تابع دلتا در معادله فوق موجود نبود، حل با پایه سینوسی قدیم ترجیح داده‌می‌شود.

چنانچه مسئله دو متغیر مکان یا بیشتر باشد و نتوان برای آن دو متغیر یک تابع u_q به‌دست آورد، در این حالت باید مسئله را با پایه و مرحله‌به‌مرحله حل کرد و یا با تبدیلات فوریه متناهی مرحله‌به‌مرحله حل کرد.

تذکر. چنانچه در معادله نسبت به x دو جمله مشتق مرتبه اول و دوم به‌صورت

$$u_{xx} + ۲\alpha u_x$$

داشته‌باشیم، با تغییر تابع مجهول $u = e^{-\alpha x} v$ و نوشتن مسئله برحسب v در معادله v فقط جمله v_{xx} ظاهر می‌شود و مشتق مرتبه اول حذف می‌گردد. دراین‌صورت بررسی حل مسئله با پایه‌های موجود و یا تهیه پایه جدید آسان‌تر انجام می‌شود.

تمرین ۱.۱۰

مسائل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه متناهی مناسب حل کنید.

۱. $u_{tt} - u_{xx} + u_{txx} + u = \delta(x - \frac{\pi}{۲})t, \qquad ۰ \le x \le \pi,\ t \ge ۰$

$$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = ۱, \quad u(۰,t) = t, \quad u_x(\pi,t) = t$$

۲. $u_t = u_{xx} - u_{xxt} + 2u + xe^{-t}, \qquad -\pi \le x \le \pi,\ t \ge 0$

$$u(x,0) = x, \quad u(-\pi,t) = t + u(\pi,t), \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)$$

۳. $u_{xx} + 2u_x + u_{yy} = x\,\delta(y-1), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$

$$u(0,y) = y, \quad u(1,y) = 0, \quad u_y(x,0) = x, \quad u_y(x,\pi) = 0$$

۴. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{ttxx} + u = x\,\delta(t-1) \qquad 0 \le x \le 1,\ t \ge 0$

$$u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = 1,$$

$$u_x(0,t) = t, \quad u_x(1,t) = 0 \quad u_{xxx}(0,t) = 1, \quad u_{xxx}(1,t) = t$$

۵. $r^2u_{rr} + rr + u_{\theta\theta} = r^2\delta(\theta - \frac{\pi}{2}), \qquad 0 \le \theta \le \pi,\ r < 1$

$$u(r,0) = r,\ u(r,\pi) = 1,\ u(1,\theta) = \theta,\ u(1,\theta) = \theta,\ |u| < \infty$$

۳.۹.۱ روش حل با سری فوریه دوگانه و سه‌گانه

چنانچه در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای دو یا سه متغیر مکان داشته‌باشیم، حل این نوع مسائل به سه طریق مقدور است:

۱. طریقه استفاده مرحله‌به‌مرحله‌ای از پایه‌های مربوط به متغیر مکان.

۲. طریقه استفاده متوالی از تبدیلات فوریه متناهی.

۳. طریقه استفاده از سری فوریه دوگانه و سه‌گانه یا پایه دوگانه و سه‌گانه.

طریقه اول در بخش ۸.۱ طبق مثال ۲۳.۱ توضیح داده‌شده‌است. طریقه دوم در زیربخش ۲.۹.۱ درمورد حل مسائل حاوی تابع دلتا توضیح داده‌شده‌است. طریقه سوم نیز در بخش ۷.۱ طی مثال‌های ۱۹.۱ و ۲۰.۱ توضیح داده‌شده‌است. از آنجاییکه جواب مسئله پاره‌ای یگانه است، اگر یک مسئله را با دو یا سه روش فوق حل کنیم جواب‌های هر دو یا سه روش با هم برابرند اگرچه تفاوت ظاهری داشته‌باشند. هدف از این قسمت این‌است که ببینیم برای یک مسئله کدام‌یک از روش‌های فوق مناسب‌تر است.

تذکر. چنانچه برای اینگونه مسائل بتوان یک u_q برای شرایط مرزی کلیه متغیرهای مکان به‌دست آورد، حل به‌صورت سری فوریه دوگانه یا سه‌گانه بهترین راه‌حل است.

مثال ۱.۲۸. مطلوبست حل مسئله

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + u + xyzt, \qquad 0 \le x,y,z \le 1,\ t \ge 0$$
$$u(x,y,z,0) = xyz,$$
$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{y=0} = 0, \quad u_z\Big|_{z=0} = 0,$$
$$u\Big|_{x=1} = tyz, \quad u_y\Big|_{y=1} = txz, \quad u\Big|_{z=1} = txy$$

حل. چون $0 \le x,y,z \le 1$، پس حل مسئله با پایه سه‌گانه مقدور است مشروط بر اینکه بتوانیم برای آن u_q به‌دست آوریم. شرایط مرزی برای x دیریکه است، درنتیجه پایه مناسب $\left\{\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ است. شرایط مرزی برای y روبین چپ است، پس پایه مناسب $\left\{\sin(n+\frac{1}{2})\pi y\right\}_{n=0}^{\infty}$ می‌باشد. شرایط مرزی برای z روبین راست است، پس پایه مناسب $\left\{\cos(n+\frac{1}{2})\pi z\right\}_{n=0}^{\infty}$ است. پیدا کردن یک u_q برای کلیه متغیرها چندان ساده نیست. لیکن برای این مسئله u_q زیر مناسب است:

$$u_q(x,y,z,t) = xyzt$$

با تغییر تابع مجهول $u = u_q + v$ مسئله را برای v می‌نویسیم. مسئله v به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$v_t = v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + v + 2xyzt - xyz, \quad 0 \le x,y,z \le 1,\ t \ge 0$$
$$v(x,y,z,0) = xyz,$$
$$v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=1} = v\Big|_{y=0} = v_y\Big|_{y=1} = v_z\Big|_{z=0} = v\Big|_{z=1} = 0$$

شرایط مرزی برای این مسئله همگن است. پس با پایه سه‌گانه حل می‌شود.

$$v(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} T_{nmj}(t)\sin n\pi x \sin(m+\frac{1}{2})\pi y \cos(j+\frac{1}{2})\pi z$$

با قرار دادن سری فوق در معادله v، معادله T_{nmj} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{T}_{nmj} = -\Big(n^2 + (m+\frac{1}{2})^2 + (j+\frac{1}{2})^2\Big)T_{nmj} + c_{nmj}t + d_{nmj}$$

که در آن

$$c_{nmj} = \frac{2}{1}\frac{2}{1}\frac{2}{1}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2xyz\,dxdydz$$
$$d_{nmj} = \frac{2}{1}\frac{2}{1}\frac{2}{1}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 -xyz\,dxdydz = -\frac{1}{2}c_{nmj}$$

محاسبه این انتگرال‌ها را برای آخر کار می‌گذاریم. از حل معادله T_{nmj} جواب عمومی آن‌را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$T_{nmj}(t) = A_{nmj}e^{-\beta_{nmj}t} + \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}}t + \frac{۱}{\beta_{nmj}}\Big(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}}\Big)$$

به‌طوری‌که

$$\beta_{nmj} =: n^۲ + (m + \tfrac{۱}{۲})^۲ + (j + \tfrac{۱}{۲})^۲.$$

از قرار دادن این T_{nmj} در سری فوریه سه‌گانه v جواب عمومی مسئله به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن جواب نهایی مسئله v باید شرایط اولیه آن‌را اعمال کنیم. از اعمال شرایط اولیه $v(x,y,z,۰) = xyz$ بر جواب عمومی v به‌دست می‌آوریم:

$$v(x,y,z,۰) = \sum_{n=۱}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{j=۰}^{\infty}\Big(A_{nmj} + \frac{۱}{\beta_{nmj}}\Big(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}}\Big)\Big)\sin n\pi x$$
$$\cdot \sin(m + \tfrac{۱}{۲})\pi y \cos(j + \tfrac{۱}{۲})\pi z = xyz$$

در نتیجه

$$A_{nmj} + \frac{۱}{\beta_{nmj}}\Big(d_{nmj} - \frac{c_{nmj}}{\beta_{nmj}}\Big) = -d_{nmj}.$$

حال با توجه به رابطه $c_{nmj} = -۲d_{nmj}$ ، A_{nmj} برحسب d_{nmj} به‌دست می‌آید.

$$A_{nmj} = -d_{nmj}\Big(۱ + \frac{۱}{\beta_{nmj}} + \frac{۲}{\beta^۲_{nmj}}\Big)$$

از قرار دادن این A_{nmj} در جواب عمومی v این جواب کاملاً مشخص می‌شود. بالاخره جواب نهایی مسئله اولیه را به‌صورت زیر داریم:

$$u(x,y,z,t) = xyzt + v(x,y,z,t)$$

حال به محاسبه d_{nmj} می‌پردازیم.

$$d_{nmj} = ۸\int_۰^۱ x\sin n\pi x\,dx \int_۰^۱ y\sin(m + \tfrac{۱}{۲})\pi y\,dy \int_۰^۱ z\cos(j + \tfrac{۱}{۲})\pi z\,dz$$
$$= ۸\frac{(-۱)^{n+۱}}{n\pi}\frac{(-۱)^m}{(m + \frac{۱}{۲})^۲\pi^۲}\Big(\frac{(-۱)^j}{\pi(j + \frac{۱}{۲})} - \frac{۱}{(j + \frac{۱}{۲})^۲\pi^۲}\Big)$$

تذکر. چنانچه تعیین u_q مقدور نباشد، مسئله را یا باید به طریقه اول یعنی استفاده مرحله‌به‌مرحله‌ای از پایه‌های مربوط به متغیر مکان و یا به طریق دوم یعنی استفاده متوالی از تبدیلات فوریه متناهی و یا ترکیبی از این دو روش حل کنیم.

مثال ۲۹.۱. مطلوبست حل مسئله زیر

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-۵u=xyz, \qquad\qquad -\pi\le x\le\pi,\ ۰\le y,z\le\pi\\
&u\Big|_{x=-\pi}=u\Big|_{x=\pi}+yz,\quad u_x\Big|_{x=-\pi}=u_x\Big|_{x=\pi}\\
&u\Big|_{y=۰}=u\Big|_{y=\pi}=xz,\quad u_z\Big|_{z=۰}=۰,\quad u_z\Big|_{z=\pi}=xy
\end{aligned}
$$

حل. ابتدا توجه کنید برای این شرایط مرزی تعیین u_q به سادگی مقدور نیست. پس حل با سری فوریه چندگانه مقدور نیست. حل را با تبدیلات فوریه متناهی انجام می‌دهیم. پایه مناسب متغیر x پایه نمایی با $p=\pi$ یعنی $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ است. پایه مناسب متغیر y پایه سینوسی قدیم با $p=\pi$ یعنی $\{\sin ny\}_{n=۱}^{\infty}$ می‌باشد. پایه مناسب متغیر z پایه کسینوسی قدیم با $p=\pi$ یعنی $\{\cos nz\}_{n=۰}^{\infty}$ است. ابتدا نسبت به x تبدیل فوریه نمایی متناهی می‌گیریم.

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}(u(x,y,z))=U(n,y,z)=U_n(y,z)=:U_n\\
&u(x,y,z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}U_n(y,z)e^{inx}\\
&\mathscr{F}(f'')=-n^۲\mathscr{F}(f)+\frac{(-۱)^n in}{۲\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]+\frac{(-۱)^n}{۲\pi}[f'(\pi)-f'(-\pi)]
\end{aligned}
$$

درنتیجه

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}(u_{xx})=-n^۲U_n+\frac{in(-۱)^{n+۱}}{۲\pi}yz\\
&\mathscr{F}(u_{yy})=U_{n_{yy}}\\
&\mathscr{F}(u_{zz})=U_{n_{zz}}
\end{aligned}
$$

حال از مسئله تبدیل فوریه متناهی می‌گیریم.

$$
\begin{aligned}
&-n^۲U_n+U_{n_{yy}}+U_{n_{zz}}-۵U_n=yz\mathscr{F}(x)+\frac{in(-۱)^n}{۲\pi}yz\\
&U_n\Big|_{y=۰}=U_n\Big|_{y=\pi}=z\mathscr{F}(x),\quad U_{n_z}\Big|_{z=۰}=۰,\quad U_{n_z}\Big|_{z=\pi}=y\mathscr{F}(x)
\end{aligned}
$$

سپس از مسئله فوق نسبت به y تبدیل فوریه سینوسی قدیم متناهی می‌گیریم.

$$\mathscr{F}_s(U_n(y,z)) = \mathscr{F}_s(U(n,y,z)) = U(n,m,z) = U_{nm}(z) =: U_{nm}$$

پس

$$\begin{aligned} -n^۲U_{nm} - m^۲U_{nm} + U_{nm_{zz}} - ۵U_{nm} &= z\mathscr{F}_s(y)\Big[\mathscr{F}(x) + \tfrac{in(-۱)^n}{۲\pi}\Big] \\ &\quad + \tfrac{۲m}{\pi} z\mathscr{F}(x)[(-۱)^m - ۱] \end{aligned}$$

$$U_{nm_z}\Big|_{z=۰} = ۰, \quad U_{nm_z}\Big|_{z=\pi} = \mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}(x)$$

این مسئله برای U_{nm} یک مسئله معادله دیفرانسیل عادی خطی با ضرایب ثابت است. آن را به‌صورت

$$U''_{nm} - (n^۲ + m^۲ + ۵)U_{nm} = c_{nm}z$$

جواب معادله فوق به‌صورت زیر می‌باشد:

$$U_{nm} = A_{nm}\cosh\alpha_{nm}z + B_{nm}\sinh\alpha_{nm}z + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۲}z$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} \alpha_{nm}^۲ &=: n^۲ + m^۲ + ۵ \\ c_{nm} &=: \mathscr{F}_s(y)\Big[\mathscr{F}(x) + \frac{in(-۱)^n}{۲\pi}\Big] + \frac{۲m}{\pi}\mathscr{F}(x)[(-۱)^m - ۱] \end{aligned}$$

با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U'_{nm} &= \alpha_{nm}B_{nm} + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۲} = ۰ \\ U_{nm_z}\Big|_{z=\pi} &= A_{nm}\cosh\alpha_{nm}\pi + B_{nm}\sinh\alpha_{nm}\pi + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۲}\pi = \mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}(x) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} B_{nm} &= -\frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۳} \\ A_{nm} &= \frac{۱}{\cosh\alpha_{nm}\pi}\left(\mathscr{F}_s(y)\mathscr{F}(x) + \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۳}\sinh\alpha_{nm}\pi - \frac{c_{nm}}{\alpha_{nm}^۲}\pi\right) \end{aligned}$$

برای اتمام حل کافی است $\mathscr{F}_s(y)$ و $\mathscr{F}(x)$ را به‌دست آوریم.

$$\mathscr{F}_s(y) = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} y\sin my\,dy = \frac{۲(-۱)^{m+۱}}{m}$$

$$\mathscr{F}(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \frac{i(-۱)^n}{n}$$

در آخر

$$u(x,y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=۰}^{\infty} U_{nm}(z)e^{inx}\sin my$$

تمرین ۱.۱۱

مسائل زیر را با استفاده از پایه‌های دوگانه و سه‌گانه حل کنید.

۱. $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} + u_{ttyy} - u + xyt, \quad ۰ \le x,y \le \pi,\ t \ge ۰$

$u(x,y,۰) = xy, \quad u_t(x,y,۰) = ۰,$

$u(۰,y,t) = u(x,۰,t) = ۰, \quad u(\pi,y,t) = \pi yt, \quad u(x,\pi,t) = \pi xt$

۲. $u_t = u_{xx} + ۲u_{yy} + ۴u_{zz} + u_{xxyyzz} + u + xyzt,\ ۰ \le x,y,z \le ۱,\ t \ge ۰$

$u(x,y,z,۰) = xyz,$

$u\big|_{x=۰} = u\big|_{x=۱} = u\big|_{y=۰} = u_y\big|_{y=۱} = u_z\big|_{z=۰} = u\big|_{z=۱} = ۰$

۳. $u_{xx} + u_{yy} - u_{xyxy} + u_{zz} - u_{yyzz} - u = xyz,$

$u(۰,y,z) = u_y(x,۰,z) = ۰, \qquad ۰ \le x,y \le \pi,\ -۱ \le z \le ۱$

$u_x(\pi,y,z) = u_y(x,\pi,z) = ۰, \qquad u\big|_{z=-۱} = u\big|_{z=۱}, \quad u_z\big|_{z=-۱} = u_z\big|_{z=۱}$

۴. $u_{tt} + u_{xxxx} + u_{yyyy} - u_{xxyyzz} + u = xyt, \quad ۰ \le x,y \le \pi,\ t \ge ۰$

$u(x,y,۰) = xy, \quad u_t(x,y,۰) = ۰,$

$u\big|_{x=۰} = u_y\big|_{y=۰} = ۰, \quad u_x\big|_{x=\pi} = yt, \quad u_y\big|_{y=\pi} = xt$

۱۰.۱ معادلات پاره‌ای روی میدان مستدیر

تعداد زیادی از مسائل معادلات با مشتقات پاره‌ای از جمله معادله لاپلاس، معادله موج و معادله حرارت دو بعدی و سه‌بعدی مکان روی میدان‌های مستدیر (یعنی دایره یا کره و یا استوانه و یا بخشی از آن‌ها) رخ می‌دهد. حل اینگونه مسائل هم با استفاده از پایه و هم تبدیلات فوریه متناهی و هم پایه دوگانه و سه‌گانه مقدور است. لیکن پایه‌های پنج‌گانه برای حل اینگونه مسائل بعضاً کافی نیست و می‌بایستی با روش جداسازی و حل مسئله اشترم-لیوویل حاصل پایه مطلوب و یا تبدیل فوریه متناهی آن‌را به‌دست آورد. حل مسائل اشترم-لیوویل اینگونه مسائل منجر به توابع خاص مانند توابع بسل، لژاندر و یا توابع دیگر می‌گردد که تعیین جمله عمومی آن‌ها در کلیت آسان نیست لیکن با تعیین چند جمله اول آن پایه‌ها و به‌کار بردن آن‌ها جواب تقریبی بسیار خوبی برای مسئله پاره‌ای به‌دست می‌آید. در این بخش ابتدا به بررسی معادله لاپلاس و معادله پوآسون می‌پردازیم که حل مسئله اشترم-لیوویل آن‌ها به‌سادگی انجام می‌شود. سپس معادلات دیگر بررسی می‌گردد. معادله لاپلاس را در صفحه به‌صورت زیر داریم:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

همچنین معادله پوآسن به‌صورت زیر است:

$$u_{xx} + u_{yy} = f_1(x, y)$$

در مختصات قطبی داریم:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},\ \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

برای نوشتن معادله پوآسن در مختصات قطبی می‌بایستی u_{xx} و u_{yy} را برحسب u_r ، u_θ ، $u_{r\theta}$ ، u_{rr} و $u_{\theta\theta}$ محاسبه کرد و در معادله قرار داد و سپس ساده نمود. با انجام این‌کار به‌دست می‌آوریم:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = f_1(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

از ضرب r^2 در رابطه فوق به‌دست می‌آوریم

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = f(r, \theta) = r^2 f_1(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

در اینجا مقصود از یک میدان مستدیر نواحی به‌صورت زیر است:

$$a \le r \le b, \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

که در آن $\alpha \ge ۰$ ، $b < \infty$ و $\beta - \alpha \le ۲\pi$. معادله اشترم-لیوویل را برای θ به‌صورت زیر داریم:

$$\ddot{\theta}(\theta) + \lambda\theta(\theta) = ۰$$

این معادله همان معادله اشترم-لیوویل برای پایه‌های پنج‌گانه است. پس اگر شرایط مرزی با شرایط مرزی یکی از پایه‌های پنج‌گانه ما تطبیق یابد، از آن‌ها می‌توانیم استفاده کنیم. به عنوان مثال برای $۰ \le \theta \le \pi$ و شرط مرزی

$$u\Big|_{\theta=۰} = g_۱(r), \quad u\Big|_{\theta=\pi} = g_۲(r)$$

پایه سینوسی قدیم مناسب حل مسئله است. حال معادله اشترم-لیوویل را برای r می‌نویسیم. این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$r^۲R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) = ۰$$

با تغییر متغیر مستقل $r = e^t$ معادله زیر را

$$\frac{d^۲R(t)}{dt^۲} + \lambda R(t) = ۰$$

خواهیم داشت. دوباره این معادله با معادله اشترم-لیوویل پایه‌های پنج‌گانه تطبیق دارد. چنانچه دامنه $t = \ln r$ با دامنه و شرایط مرزی آن با یکی از پایه‌های پنج‌گانه تطبیق داشته‌باشد، از قرار دادن $x = \ln r$ در آن پایه، پایه مناسب متغیر r برای مسئله پوآسن به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال برای $۱ < r < e^p$ و شرایط مرزی

$$u\Big|_{r=۱} = h_۱(\theta), \quad u_r\Big|_{r=e^p} = h_۲(\theta)$$

پایه سینوسی جدید با قرار دادن $\ln r$ به‌جای x یعنی

$$\left\{ \sin\left(n + \tfrac{۱}{۲}\right) \frac{\pi \ln r}{p} \right\}_{n=۰}^{\infty}$$

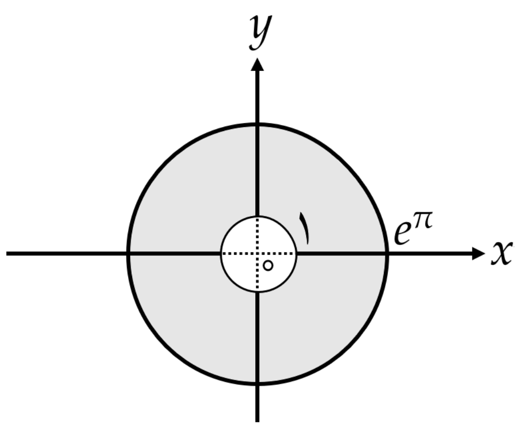
مناسب حل مسئله است.

تذکر. اگر یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای را با پایه یا تبدیلات فوریه متناهی حل کنیم و به یک معادله دیفرانسیل عادی برسیم، بهتر است آن را با استفاده از جواب عمومی آن معادله دیفرانسیل عادی حل کنیم.

مثال ۱.۳۰. مطلوبست حل مسئله معادله پوآسون زیر

$$\Delta u = ۲xy, \qquad ۱ < r < e^{\pi},$$
$$u\Big|_{r=۱} = ۰, \qquad u\Big|_{r=e^{\pi}} = \sin ۲\theta.$$

حل. برای اینکه میدان مسئله فوق، یعنی شکل ۱.۴، را برحسب θ و r بنویسیم، باید دامنه θ را به طول



شکل ۱.۴: یک میدان مستدیر

۲π داشته‌باشیم. پس می‌گیریم $-\pi < \theta < \pi$. شرایط مرزی برای θ متناوب همگن است، چون u و u_θ در داخل میدان پیوسته است.

$$u\Big|_{\theta=-\pi} = u\Big|_{\theta=\pi} \quad \text{و} \quad u_\theta\Big|_{\theta=-\pi} = u_\theta\Big|_{\theta=\pi}$$

حل ۱: با استفاده از پایه برای θ. چون شرایط مرزی متناوب است، پس پایه مناسب پایه نمایی با $p = \pi$ است. یعنی

$$\left\{e^{in\theta}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}.$$

این معادله در مختصات قطبی به‌صورت

$$r^۲u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = r^۴ \sin ۲\theta$$

با شرایط مرزی نمایی همگن است. پس نیازی به پیدا کردن u_q نیست. پس می‌گیریم

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) e^{in\theta}.$$

از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آوریم:

$$r^۲ R_n'' + rR_n' - n^۲ R_n = r^۴ \begin{cases} ۰ & n \neq ۲, -۲ \\ \frac{۱}{۲i} & n = ۲ \\ -\frac{۱}{۲i} & n = -۲ \end{cases} = r^۴ C_n$$

این معادله، معادله کشی اولر است. معادله مشخصه آن عبارتست از

$$\lambda^۲ - n^۲ = ۰ \Rightarrow \lambda = \pm n.$$

جواب عمومی معادله همگن می‌شود:

$$R_{n_c}(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$$

جواب مخصوص آن را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$R_{n_p}(r) = D_n r^۴ \qquad n \neq ۴$$

آن را در معادله قرار دهید، به‌دست می‌آوریم:

$$۱۲ D_n r^۴ + ۴ D_n r^۴ - n^۲ D_n r^۴ = C_n r^۴$$

پس برای $n \neq ۴$،

$$D_n = \frac{C_n}{۱۶ - n^۲}.$$

برای $n = ۴$ باید بگیریم

$$D_{۴_p}(r) = D_n r^۴ \ln r.$$

لیکن $C_۲ = \frac{۱}{۲i}$ و $C_{-۲} = -\frac{۱}{۲i}$ و $C_n = ۰$ برای $n \neq ۲, -۲$. پس $D_۲ = \frac{۱}{۲۴i}$ و $D_{-۲} = -\frac{۱}{۲۴i}$ و $D_n = ۰$ برای $n \neq ۲, -۲$. به‌این ترتیب جواب عمومی معادله R را به‌صورت زیر خواهیم‌داشت:

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} + \frac{C_n}{۱۶ - n^۲} r^۴$$

همچنین جواب عمومی مسئله u را به‌صورت زیر داریم:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(A_n r^n + B_n r^{-n} + \frac{C_n}{۱۶-n^۲} r^۴\Big) e^{in\theta}.$$

حال شرایط مرزی r را اعمال می‌کنیم تا A_n و B_n به‌دست آید.

$$u(۱,\theta) = ۰ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(A_n + B_n + \frac{C_n}{۱۶-n^۲}\Big) e^{in\theta} = ۰$$

در نتیجه

$$A_n + B_n + \frac{C_n}{۱۶-n^۲} = ۰ \tag{۱.۱}$$

و

$$u(e^\pi,\theta) = \sin ۲\theta$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} + \frac{C_n}{۱۶-n^۲} e^{۴\pi}\Big) e^{in\theta} = \sin ۲\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}$$

که C_n قبلاً تعریف شده است. پس

$$A_n e^{n\pi} + B_n e^{-n\pi} + \frac{C_n}{۱۶-n^۲} e^{۴\pi} = C_n. \tag{۲.۱}$$

از حل دو معادله (۱.۱) و (۲.۱) به‌دست می‌آوریم:

$$A_n = B_n = ۰ \qquad \text{برای } n \neq ۲,-۲$$

$$A_۲ = \frac{C_۲}{۲\sinh ۲\pi}\Big[۱ - \frac{۱}{۱۲}(e^{۴\pi} - e^{-۲\pi})\Big]$$

$$B_۲ = -\frac{C_۲}{۲\sinh ۲\pi}\Big[۱ - \frac{۱}{۱۲}(e^{۴\pi} - e^{۲\pi})\Big]$$

مشابهاً

$$A_{-۲} = -\frac{C_{-۲}}{۲\sinh ۲\pi}\Big[۱ - \frac{۱}{۱۲}(e^{۴\pi} - e^{۲\pi})\Big]$$

$$B_{-۲} = \frac{C_{-۲}}{۲\sinh ۲\pi}\Big[۱ - \frac{۱}{۱۲}(e^{۴\pi} - e^{-۲\pi})\Big]$$

از قرار دادن این A_nها و B_nها در جواب عمومی u جواب مسئله به‌دست می‌آید.

حل ۲: با استفاده از پایه برای r. شرایط مرزی را برای r شرط مرزی دیریکه برای $p=\pi$ داریم. پس، طبق مطالب گفته شده پایه مناسب را برای متغیر r به‌صورت زیر داریم:

$$\left\{\sin(n\ln r)\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad 1<r<e^{\pi}$$

شرایط مرزی برای r غیرهمگن است. پس باید u_q به‌دست آوریم.

$$u_q(r,\theta)=Ar+B$$

حال A و B را محاسبه می‌کنیم.

$$u_q(1,\theta)=A+B=0 \Rightarrow B=-A$$
$$u_q(1,\theta)=Ae^{\pi}+B=\sin 2\theta$$

در نتیجه

$$A=-B=\frac{1}{e^{\pi}-1}\sin 2\theta$$
$$u_q(r,\theta)=\frac{1}{e^{\pi}-1}\sin 2\theta(r-1)$$

حال بگیرید $u=u_q+v$. مسئله v می‌شود:

$$r^2v_{rr}+rv_r+v_{\theta\theta}=\sin 2\theta\left[r^4-\frac{r}{e^{\pi}-1}+\frac{4}{e^{\pi}-1}(r-1)\right]$$
$$v(1,\theta)=0,\ v(e^{\pi},\theta)=0, v(r,-\pi)=v(r,\pi),\ v_{\theta}(r,-\pi)=v_{\theta}(r,\pi).$$

بگیرید

$$v(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\theta)\sin(n\ln r).$$

از قرار دادن آن در معادله به‌دست می‌آوریم

$$-n^2b_n(\theta)+b_n''(\theta)=c_n\sin 2\theta,$$

به‌طوری‌که

$$r^4+\frac{3}{e^{\pi}-1}r-\frac{4}{e^{\pi}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\ln r)$$

و

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_{1}^{e^{\pi}} \frac{1}{r}\Big(r^{4} + \frac{3}{e^{\pi}-1}r - \frac{4}{e^{\pi}-1}\Big)\sin(n\ln r)\,dr}{\displaystyle\int_{1}^{e^{\pi}} \frac{1}{r}\sin^{2}(n\ln r)\,dr}.$$

محاسبه این انتگرال‌ها با تغییر متغیر $r = e^{t}$ به‌سادگی قابل انجام است. از حل معادله $b_n(\theta)$ به‌دست می‌آوریم

$$b_n(\theta) = A_n\cosh n\theta + B_n\sinh n\theta - \frac{c_n}{n^{2}+4}\sin 2\theta.$$

پس جواب عمومی مسئله v به‌صورت زیر است:

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cosh n\theta + B_n\sinh n\theta - \frac{c_n}{n^{2}+4}\sin 2\theta\Big)\sin(n\ln r)$$

با اعمال شرایط مرزی برای θ به‌راحتی $A_n = B_n = 0$ به‌دست می‌آید. یعنی جواب مسئله v عبارت است از

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(-\frac{c_n}{n^{2}+4}\sin 2\theta\Big)\sin(n\ln r)$$

و جواب مسئله u به‌صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= u_q(r,\theta) + v(r,\theta) \\ &= \frac{1}{e^{\pi}-1}\sin 2\theta(r-1) - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{c_n}{n^{2}+4}\sin 2\theta\Big)\sin(n\ln r). \end{aligned}$$

حل ۳: توجه کنید مسئله v در حل ۲ با شرایط مرزی همگن است. پس با سری فوریه دوگانه قابل‌حل می‌باشد. می‌گیریم

$$v(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{nm}e^{im\theta}\sin(n\ln r).$$

آن را در معادله قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{nm}(n^2+m^2)e^{im\theta}\sin(n\ln r)&\\&=\sin 2\theta\Big[r^4-\frac{r}{e^{\pi}-1}+\frac{4}{e^{\pi}-1}(r-1)\Big]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}d_{nm}e^{im\theta}\sin(n\ln r)\end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}d_{nm}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\theta e^{-im\theta}\,d\theta\,.\,\frac{\int_1^{e^{\pi}}\frac{1}{r}\Big(r^4+\frac{3}{e^{\pi}-1}r-\frac{4}{e^{\pi}-1}\Big)\sin(n\ln r)\,dr}{\int_1^{e^{\pi}}\sin^2(n\ln r)\,dr}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2\theta(\cos m\theta-i\sin m\theta)\,d\theta\,\frac{\int_0^{\pi}\Big(e^{4t}+\frac{3}{e^{\pi}-1}e^t-\frac{4}{e^{\pi}-1}\Big)\sin nt\,dt}{\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt}\\&=\frac{1}{2\pi}\begin{Bmatrix}-\frac{i}{2} & m=2\\ \frac{i}{2} & m=2\\ 0 & m\neq 2,-2\end{Bmatrix}.\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(e^{4t}+\frac{3}{e^{\pi}-1}e^t-\frac{4}{e^{\pi}-1}\Big)\sin nt\,dt.\end{aligned}$$

در نتیجه جواب مسئله u، به‌صورت $u=u_q+v$ است.

تذکر. حل ۳ ساده‌ترین است، لیکن حل ۱ همیشه مقدور می‌باشد.

اکنون به بررسی یک مسئله انتقال حرارت در صفحه می‌پردازیم.

مثال ۳۱.۱. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}+u_{yy}, && x^2+y^2<p,\ t>0,\\&u(x,y,0)=x^2+y^2, && u\big|_{x^2+y^2=p}=0.\end{aligned}$$

حل. میدان مکان این مسئله دایره است. پس مسئله را باید در مختصات قطبی بررسی کنیم. در این مختصات مسئله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$u_t = u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\theta\theta}, \qquad r < p,\ t > ۰,$$
$$u(r,\theta,۰) = r^۲, \qquad u(p,\theta,t) = ۰.$$

در اینجا $۰ \le r \le p$ و $-\pi \le \theta \le \pi$ تغییر می‌کند و شرایط مرزی پنهان را برای θ به‌صورت تناوبی داریم. یعنی

$$u\Big|_{\theta=-\pi} = u\Big|_{\theta=\pi}, \quad u_\theta\Big|_{\theta=-\pi} = u_\theta\Big|_{\theta=\pi}.$$

همچنین چون u در $r = ۰$ پیوسته است، پس

$$|u|\Big|_{r=۰} < \infty$$

از آنجا که در تابع‌ها و داده‌های این مسئله θ ظاهر نشده‌است، پس می‌توان انتظار داشت که جواب مسئله نیز مستقل از θ باشد. در این‌صورت مسئله به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$u_t = u_{rr} + \frac{۱}{r}u_r, \qquad r < p,\ t > ۰,$$
$$u(r,۰) = r^۲, \qquad u(p,t) = ۰, \qquad |u|\Big|_{r=۰} < \infty$$
$$u\Big|_{\theta=-\pi} = u\Big|_{\theta=\pi}, \qquad u_\theta\Big|_{\theta=-\pi} = u_\theta\Big|_{\theta=\pi}.$$

اکنون پایه متغیر مکان یعنی r را تعیین می‌کنیم. مسئله اشترم–لیوویل مربوط به r به‌صورت زیر است:

$$R'' + \frac{۱}{r}R' = -\lambda R, \qquad ۰ \le r \le p$$
$$R(p) = ۰, \qquad |R(۰)| < \infty.$$

درنتیجه، معادله فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$r^۲R'' + rR' + \lambda r^۲ R = ۰$$

این معادله، معادله بسل از مرتبه صفر تعمیم‌یافته بسل یعنی معادله بسل از مرتبه ν تعمیم‌یافته زیر است:

$$x^۲y'' + xy' + (m^۲x^۲ - \nu^۲)y = ۰, \quad \lambda = m^۲$$

این معادله برای $x > 0$ دارای جواب عمومی زیر است:

$$y(x) = C_1 J_\nu(mx) + C_2 Y_\nu(mx)$$

$J_\nu(x)$ را تابع بسل نوع اول از مرتبه ν و $Y_\nu(x)$ را تابع بسل از مرتبه ν می‌گویند. $J_\nu(x)$ تابعی کرانه‌دار و نوسانی با دنباله‌ای از صفرها است. تابع بسل $Y_\nu(x)$ در مبدأ بیکران می‌شود. برای مسئله اشترم–لیوویل ما جواب عمومی برای $\lambda = m^2$ به‌صورت زیر است:

$$R(r) = C_1 J_0(mr) + C_2 Y_0(mr)$$

چون $Y_0(mr)$ در $r = 0$ بیکران است، پس برای برقراری شرط $|R(0)| < \infty$ باید $C_2 = 0$. برای برقراری شرط $R(p) = 0$ باید $C_1 J_0(mp) = 0$. پس برای $C_1 \neq 0$ باید $J_0(mp) = 0$ یا باید mp یک ریشه $J_0(x)$ باشد. برای $x \geq 0$، نمودار $J_0(x)$ شبه نمودار $\frac{\sin x}{x}$ است. اگر ریشه‌های $J_0(x)$ را به‌صورت $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ بگیریم، در این‌صورت باید $mp = \alpha_n$ یا $m = \frac{\alpha_n}{p}$ و $\lambda_n = \frac{\alpha_n^2}{p^2}$. به‌این‌ترتیب مقادیر خاص و توابع خاص به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n^2}{p^2}, \qquad \phi_n(r) = J_0\Big(\frac{\alpha_n}{p} r\Big), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

همچنین اگر $f(r)$ روی $[0, p]$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته باشد

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(r),$$

دراین‌صورت

$$a_n = \frac{\int_0^p r f(r) \phi_n(r)\, dr}{\int_0^p r \phi_n^2(r)\, dr}.$$

برای حل مسئله معادله پاره‌ای فوق باید بگیریم

$$u(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\, J_0(k_n r), \qquad k_n := \frac{\alpha_n}{p}.$$

از قرار دادن آن در معادله پاره‌ای به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n(t)\, J_0(k_n r) &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \Big[J_0''(k_n r) + \frac{1}{r} J_0'(k_n r) \Big] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \Big(-k_n^2\, J_0(k_n r) \Big).\end{aligned}$$

پس $T_n(t)$ جواب معادله زیر است:

$$\dot{T}_n(t) + k_n^۲ T_n(t) = ۰.$$

این معادله دارای جواب عمومی زیر می‌باشد:

$$T_n(t) = A_n e^{-k_n^۲ t}$$

همچنین شرط اولیه را به‌صورت زیر داریم:

$$u(r,۰) = \sum_{n=۰}^{\infty} T_n(۰)\, J_۰(k_n r) = r^۲$$

درنتیجه

$$T_n(۰) = \frac{\int_۰^p r^۳\, J_۰(k_n r)\, dr}{\int_۰^p r\, J_۰^۲(k_n r)\, dr} := b_n.$$

از اعمال آن در جواب $T_n(t)$ به‌دست می‌آوریم:

$$A_n = b_n$$

و نهایتاً جواب مسئله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u(r,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n\, e^{-k_n^۲ t}\, J_۰(k_n r).$$

تذکر. ۱) برای $\lambda \leq ۰$ تابع خاصی به‌دست نمی‌آید.

۲) ریشه‌های $J_۰(x)$ مانند ریشه‌های $\sin x$ منظم نیستند.

مثال ۳۲.۱. فرض کنید (r,θ,ϕ) مختصات کروی در فضای سه‌بعدی باشد. معادله لاپلاس در فضای سه‌بعدی یعنی

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰$$

با توجه به $x = r\sin\phi\cos\theta$، $y = r\sin\phi\sin\theta$ و $z = r\cos\phi$ به‌طوری‌که $r > ۰$، $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ و $۰ \leq \phi \leq \pi$. معادله لاپلاس در مختصات کروی به‌صورت زیر می‌شود:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{۲}{r}u_r + \frac{۱}{r^۲}u_{\phi\phi} + \frac{\cot\phi}{r^۲}u_\phi + \frac{۱}{r^۲\sin^۲\phi}u_{\theta\theta} = ۰$$

این معادله را بر روی کره‌ای به شعاع $r = a$ و شرط مرزی زیر که به θ وابسته نیست در نظر بگیرید

$$u(a,\theta,\phi) = f(\phi).$$

دراین‌صورت می‌توان انتظار داشت که جواب مسئله نیز مستقل از θ باشد. به‌این‌ترتیب معادله به‌صورت زیر ساده می‌گردد:

$$r^۲u_{rr} + ۲ru_r + u_{\phi\phi} + \cot\phi u_\phi = ۰$$

همچنین برای پیوستگی جواب در مبدأ باید

$$|u(۰,\phi)| < \infty.$$

مسئله اشترم–لیوویل را برای ϕ به‌صورت زیر داریم:

$$\frac{۱}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{d\Phi}{d\phi}\right) + \lambda\Phi = ۰, \qquad ۰ < \phi < \pi$$

با تغییر متغیر $\omega = \cos\phi$، معادله فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d}{d\omega}(۱-\omega^۲)\frac{d\Phi}{d\omega} + \lambda\Phi = ۰, \qquad -۱ < \omega < ۱$$

همچنین $\omega \to \pm۱$، Φ و Φ' کرانه‌دار است. برای $\lambda \neq n(n+۱)$، معادله لژاندر فاقد جواب کرانه‌دار روی $-۱ \leq \omega \leq ۱$ است. اگر $\lambda = n(n+۱)$، این معادله یک جواب چندجمله‌ای از درجه n دارد که از فرمول زیر قابل‌حصول است. در اینجا $P_n(\omega)$ همان چندجمله لژاندر است.

$$P_n(\omega) = \frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(\omega^۲-۱)^n$$

جواب مستقل دوم را به‌صورت زیر داریم:

$$Q_n(\omega) = \frac{۱}{۲}P_n(\omega)\ln\frac{۱+\omega}{۱-\omega}$$

به‌این‌ترتیب جواب عمومی معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi(\omega) = C_۱ P_n(\omega) + C_۲ Q_n(\omega)$$

برای کرانه‌دار ماندن $\Phi(\omega)$ روی $-۱ \leq \omega \leq ۱$، باید $C_۲ = ۰$. به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$\Phi_n(\omega) = P_n(\omega).$$

پس توابع خاص را برای مسئله فوق که یک مسئله اشترم-لیوویل نامنظم است، به‌صورت زیر داریم:

$$\Phi_n(\omega) = P_n(\cos\phi), \qquad n = ۰, ۱, ۲, ...$$

حال جواب مسئله اولیه را برحسب این پایه درنظر می‌گیریم

$$u(r,\phi) = \sum_{n=۰}^{\infty} R_n(r) P_n(\cos\phi).$$

از قرار دادن این جواب در معادله لاپلاس، معادله را برای $R_n(r)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R''_n(r) + ۲rR'_n(r) - n(n+۱)R_n(r) = ۰$$

این معادله کوشی-اولر با معادله مشخصه زیر است:

$$\lambda^۲ + \lambda - n(n+۱) = ۰ \Rightarrow \lambda = n, -n-۱$$

پس

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n-۱}.$$

درنتیجه،

$$u(r,\phi) = \sum_{n=۰}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-n-۱}\right) P_n(\cos\phi)$$

جواب عمومی مسئله می‌شود. برای کرانه‌دار ماندن جواب در مبدأ باید $B_n = ۰$. برای تعیین A_nها شرط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$u(a,\phi) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\phi) = f(\phi) = F(\cos\phi).$$

با گرفتن $\omega = \cos\phi$ به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\omega) = F(\omega) = f(\cos^{-1}\omega).$$

چون $\{P_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $s(\omega) = 1$ بر هم عمودند، پس

$$A_n a^n \int_{-1}^{1} P_n^2(\omega)\, d\omega = \int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}\omega) P_n(\omega)\, d\omega.$$

لیکن $\int_{-1}^{1} P_n^2(\omega)\, d\omega = \frac{2}{2n+1}$. درنتیجه

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^{1} f(\cos^{-1}\omega) P_n(\omega)\, d\omega$$

یا با تغییر متغیر $\omega = \cos\phi$،

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{0}^{\pi} f(\phi) P_n(\cos\phi) \sin\phi\, d\phi.$$

به‌این‌ترتیب جواب نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\int_{0}^{\pi} f(\phi) P_n(\cos\phi) \sin\phi\, d\phi\right] P_n(\cos\phi).$$

تمرین ۱.۱۲

مطلوبست حل مسائل زیر

۱. $u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \qquad x^2 + y^2 < 1,\ y > 0$

$$u\Big|_{x^2+y^2=1} = xy, \qquad u\Big|_{y=0} = x.$$

۲. $u_{xx} + u_{yy} = xy, \qquad 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0$

$$u\Big|_{x^2+y^2=1} = xy, \qquad u\Big|_{x^2+y^2=2} = 1, \qquad u_x\Big|_{x=0} = y.$$

۳. $u_{xx}+u_{yy}=x^{۲}-y^{۲}, \qquad x^{۲}+y^{۲}<۱, x>۰, y>۰$

$u\big|_{x^{۲}+y^{۲}=۱}=x+y, \quad u\big|_{x=۰}=y, \quad u_y\big|_{y=۰}=x.$

۴. $u_{xx}+u_{yy}=(x^{۲}+y^{۲})xy, \qquad x^{۲}+y^{۲}<۱, y>۰$

$u\big|_{x^{۲}+y^{۲}=۱}=۰, \quad u_y\big|_{y=۰,x<۰}=x, \quad u\big|_{y=۰,x>۰}=x^{۲}.$

۵. $u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta}=r\theta, \qquad r<۱, ۰<\theta<\pi$

$u_r\big|_{r=۱}=\theta, \quad u\big|_{\theta=۰}=r, \quad u_\theta\big|_{\theta=\pi}=۱.$

۶. $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=(x^{۲}+y^{۲})z, \qquad x^{۲}+y^{۲}<۱, ۰<z<۱$

$u\big|_{x^{۲}+y^{۲}=۱}=xyz, \quad u\big|_{z=۰}=x^{۲}+y^{۲}, \quad u\big|_{z=۱}=۰.$

۷. $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+(x^{۲}+y^{۲})t, \qquad x^{۲}+y^{۲}<۱, t>۰$

$u\big|_{x^{۲}+y^{۲}=۱}=۲, \quad u\big|_{t=۰}=۰, \quad u_t\big|_{t=۰}=x^{۲}+y^{۲}.$

۸. $u_t=u_{rr}+\frac{۱}{r}u_r+\frac{۱}{r^{۲}}u_{\theta\theta}, \qquad r<۱, ۰<\theta<\pi, t>۰$

$u(r,\theta,۰)=r\theta, \quad u(۱,\theta,t)=\theta t, \quad |u(r,\theta,t)|<\infty,$

$u(r,۰,t)=rt, \quad u_\theta(r,\pi,t)=r^{۲}t^{۲}.$

۹. $u_{rr}+\frac{۲}{r}u_r+\frac{۱}{r^{۲}}u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{r^{۲}}u_\phi+\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\phi}u_{\theta\theta}=r\phi,$

$u(۱,\theta,\phi)=\cos\phi, \qquad r\le ۱, ۰\le\theta\le ۲\pi, ۰\le\phi\le\pi.$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران

در فصل گذشته مسائل روی میدان مکان کرانه‌دار را مورد مطالعه قرار دادیم و ابزار حل آن را در پایه‌ها و تبدیلات فوریه یافتیم. در بعضی از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای میدان مکان بیکران است به‌این معنی که دامنه تغییرات یکی از متغیرهای مکان تا $+\infty$ یا $-\infty$ ادامه دارد. ابزارهای فوق‌الذکر برای حل این‌گونه متغیرها مناسب نیست. لذا باید برای حل این‌گونه مسائل ابزار یا روش حل مناسبی ابداع نمائیم تا حل آنها میسر گردد. در بخش ۱.۲ به معرفی تبدیلات فوریه نامتناهی می‌پردازیم و حل معادلات دیفرانسیل را با استفاده از آن خواهیم دید. بخش ۲.۲ را به روش دالامبر اختصاص می‌دهیم. در بخش ۴.۲ هم حل با استفاده از تبدیل لاپلاس و اصل دوهامل می‌آید.

۱.۲ تبدیلات و انتگرال‌های فوریه

هدف از این بخش ساختن تبدیلات فوریه (نامتناهی) به‌عنوان ابزاری برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران است. این‌کار با استفاده از تبدیلات فوریه متناهی و میل دادن p به‌سمت بینهایت انجام می‌شود. خواهیم دید که این‌گونه تبدیلات سه خاصیت اساسی تبدیلات انتگرال را دارا هستند و حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی با ضرایب ثابت را ممکن می‌سازند. در ابتدا تبدیل و انتگرال فوریه سینوسی را داریم که از روی تبدیل فوریه سینوسی قدیم ساخته می‌شود.

تبدیل و انتگرال سینوسی: تبدیل فوریه سینوسی قدیم و تبدیل معکوس آن را برای تابع f و f' قطعه‌به‌قطعه پیوسته با دامنه $[0,\infty)$ داریم. برای $p>0$ این تابع را روی $[0,\infty)$ با $f_p(x)$ نشان می‌دهیم. برای f_p داریم:

$$\mathscr{F}_s(f_p)=\frac{2}{p}\int_0^p f_p(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx=F_s(n)$$
$$f_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_s(n)\sin\frac{n\pi x}{p}.$$

دنبال این هستیم که p را به‌سمت بینهایت میل دهیم. برای این‌کار ابتدا $F_s(n)$ را در فرمول تبدیل معکوس جایگزین و سپس $p\to+\infty$. بعد از قرار دادن $F_s(n)$ در فرمول تبدیل معکوس به‌دست می‌آوریم.

$$f_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{p}\left(\int_0^p f_p(y)\sin\frac{n\pi y}{p}\,dy\right)\sin\frac{n\pi x}{p}.$$

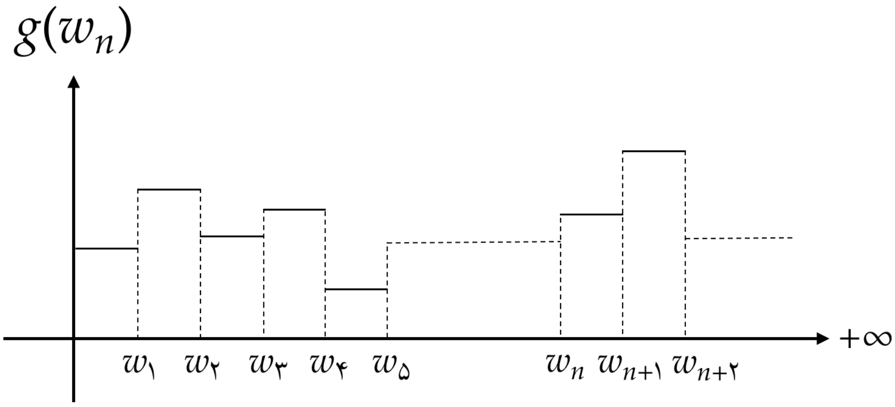
چون متغیر انتگرال جدا از متغیر سری فوریه است برای جلوگیری از ابهام آن را در این‌جا با y نشان می‌دهیم. برای انجام $p\to\infty$ آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$f_p(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^p f_p(y)\sin\frac{n\pi y}{p}\,dy\right)\sin\frac{n\pi x}{p}\frac{\pi}{p}$$

حال بگیرید $w_n=\frac{n\pi}{p}$، $\Delta w=\frac{\pi}{p}$. در این صورت داریم:

$$f_p(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}g(w_n,p,x)\Delta w.$$

که در آن x به‌عنوان یک پارامتر یا ثابت محسوب می‌گردد. برای x و p معین g فقط تابعی از w_n است و نمودار زیر برای آن قابل تصور است، که در آن $w_n=n\Delta w$. (به‌شکل ۱.۲ توجه کنید.) حال اگر $p\to\infty$ خواهیم داشت:



شکل ۱.۲: نمودار $g(w_n)$

$$f_p(x) \to f(x)$$
$$\Delta w \to dw$$
$$w_n \to w$$
$$g(w_n, p, x) \to g(w, x)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \to \int_0^{\infty}$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(y) \sin wy \, dy \right) \sin wx \, dw.$$

تبدیل فوریه سینوسی: تابع $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx$ را تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی f گوییم و با $\mathscr{F}_s(f)$ یا $F_s(w)$ نشان می‌دهیم. همچنین $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(w) \sin wx \, dw$ را انتگرال فوریه سینوسی f گوییم. توجه کنید $F_s(w)$ دارای دامنه $[0, \infty)$ است. بدین‌ترتیب

$$\mathscr{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx = F_s(w)$$
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(w) \sin wx \, dw.$$

فرمول دوم را تبدیل معکوس فوریه سینوسی (نامتناهی) نیز می‌گویند.

در ارتباط با این تبدیل خاصیت زیر را داریم.

خاصیت ۱.۲. فرض کنید f و f' روی $[0,\infty)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و $f(\infty)=f'(\infty)=0$ و $\int_0^\infty |f(x)|\,dx<\infty$. آن‌گاه تبدیل فوریه سینوسی f موجود است. به‌علاوه این تبدیل سه خاصیت اساسی تبدیلات انتگرالی را دارد و

$$\mathscr{F}_s(f'')=-w^2\mathscr{F}_s(f)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0).$$

علت. چون $\int_0^\infty |f(x)|\,dx<\infty$ پس برای هر $w\in[0,\infty)$، تابع $F_s(w)$ خوش‌تعریف است. خاصیت خطی از انتگرال به‌ارث می‌رسد و تبدیل معکوس همان انتگرال فوریه سینوسی نامتناهی است.

همانند تبدیلات فوریه سینوسی متناهی، فقط تبدیل مشتقات از مرتبه زوج بر حسب تبدیل فوریه سینوسی نامتناهی خود تابع قابل بیان است.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_s(f'')&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f''(x)\sin wx\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[f'(x)\sin wx\Big|_0^\infty\\&\quad-\int_0^\infty f'(x)w\cos wx\,dx\Big]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big[f(x)w\cos wx\Big|_0^\infty\\&\quad+\int_0^\infty w^2f(x)\sin wx\,dx\Big]\\&=-w^2\mathscr{F}_s(f)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)w.\end{aligned}$$

مشابهاً با استفاده از تبدیل فوریه کسینوسی متناهی تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی را به‌صورت زیر به‌دست می آوریم.

تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی:

$$\mathscr{F}_c(f)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx\,dx=F_c(w)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(w)\cos wx\,dw$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}_c(f'') = -w^{۲}\mathscr{F}_c(f) - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}f'(۰).$$

همچنین از روی تبدیل فوریه متناهی تبدیل فوریه نامتناهی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

تبدیل فوریه نامتناهی:

$$\mathscr{F}(f) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}\,dx = F(w)$$

تبدیل معکوس:

$$f(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-iwx}\,dw$$

تبدیل مشتق:

$$\mathscr{F}(f^{(n)}) = (-iw)^n\mathscr{F}(f).$$

تذکر. ۱) هم برای تبدیل فوریه کسینوسی نامتناهی و هم برای تبدیل فوریه نامتناهی، f و f' می‌بایستی قطعه‌به‌قطعه پیوسته و در $\pm\infty$ صفر شوند. به‌علاوه انتگرال قدرمطلق آنها می‌بایستی یک عدد حقیقی باشد.

۲) همیشه مقصود از تبدیل فوریه سینوسی یا کسینوسی یا تبدیل فوریه، تبدیل فوریه نامتناهی است. لذا از این پس کلمه نامتناهی را ذکر نخواهیم کرد.

۳) چنان‌چه توابع درگیر در یک مسئله معادله دیفرانسیل پاره‌ای خطی با ضرایب ثابت دارای تبدیلات فوریه مربوط باشد آن مسئله دارای جواب یگانه است. به‌علاوه جواب مسئله نسبت به این توابع به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند.

مثال ۱.۲. تبدیل فوریه سینوسی و انتگرال فوریه سینوسی تابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases}$$

حل.

$$\mathscr{F}_s(f) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_۰^\infty f(x) \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_۰^۱ \sin wx \, dx$$
$$= -\sqrt{\frac{۲}{\pi}} \frac{\cos wx}{w} \Big|_۰^۱ = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \left(\frac{-\cos w + ۱}{w} \right)$$

پس

$$f(x) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{-\cos w + ۱}{w} \sin wx \, dw.$$

از قرار دادن $x = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آوریم.

$$f(\tfrac{۱}{۲}) = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{-\cos w + ۱}{w} \sin \frac{w}{۲} \, dw = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{۲ \sin^۳ \frac{w}{۲}}{w} \, dw$$
$$= \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty ۲ \frac{\sin^۳ \frac{w}{۲}}{\frac{w}{۲}} \, d(\frac{w}{۲}) = \frac{۴}{\pi} \int_۰^\infty \frac{\sin^۳ y}{y} \, dy$$

یا

$$\int_۰^\infty \frac{\sin^۳ y}{y} \, dy = \frac{\pi}{۴}.$$

خاصیت ۲.۲. فرض کنید f و f' با دامنه $[۰, \infty)$ یا $(-\infty, \infty)$ قطعه‌به‌قطعه پیوسته و انتگرال قدرمطلق f روی دامنه خود کمتر از بینهایت باشد. آن‌گاه تبدیل فوریه مربوط و انتگرال فوریه مربوط موجود است. در نقاط پیوستگی f مقدار انتگرال فوریه مربوط برابر مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی مقدار انتگرال فوریه مربوط برابر با میانگین حد چپ و حد راست تابع است.

مثال ۲.۲. در انتگرال فوریه سینوسی مثال فوق قرار دهید $x = ۱$. در این‌صورت

$$\frac{۰ + ۱}{۲} = \frac{f(۱^+) + f(۱^-)}{۲} = \frac{۲}{\pi} \int_۰^\infty \frac{۱ - \cos w}{w} \sin w \, dw$$
$$= \frac{۲}{\pi} \left[\int_۰^\infty \frac{\sin w}{w} \, dw - \int_۰^\infty \frac{\cos w \sin w}{w} \, dw \right]$$
$$= \frac{۲}{\pi} \left[\int_۰^\infty \frac{\sin w}{w} \, dw - \frac{۱}{۲} \int_۰^\infty \frac{\sin ۲w}{۲w} \, d(۲w) \right]$$
$$= \frac{۲}{\pi} \frac{۱}{۲} \int_۰^\infty \frac{\sin w}{w} \, dw.$$

بدین‌ترتیب به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{\circ}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{۲}.$$

تذکر. ۱) یکی از کاربردهای انتگرال فوریه محاسبه انتگرال‌های ناسره است.

۲) کاربرد تبدیل فوریه در حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای مانند تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه متناهی است و جواب مسئله به‌صورت انتگرال فوریه قابل حصول و قابل قبول است.

۳) از تبدیل فوریه سینوسی برای متغیر مکان با دامنه $[\circ, \infty)$ و شرط مرزی دیریکله در نقطه صفر و شرط مرزی در بینهایت برابر صفر و بدون حضور مشتق فرد در معادله نسبت به این متغیر استفاده می‌گردد.

۴) از تبدیل فوریه کسینوسی برای متغیر مکان با دامنه $[\circ, \infty)$ و شرط مرزی نیومن در نقطه صفر و شرط مرزی در بینهایت برابر صفر و بدون حضور مشتق فرد در معادله نسبت به این متغیر قابل استفاده است.

۵) از تبدیل فوریه برای متغیر مکان با دامنه $(-\infty, \infty)$ و شرط مرزی برابر صفر در $\pm\infty$ استفاده می‌گردد.

۶) محاسبه تبدیل مشتقات مرتبه بالاتر با استقرا مقدور است.

مثال ۳.۲. مطلوبست حل مسئله پوسته مرتعش زیر:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - u + e^{-x-y+t}, & \circ \le x < \infty, \quad \circ \le y < \infty, \quad t \ge \circ \\ u(x,y,\circ) = e^{-x-y}, \quad u_t(x,y,\circ) = \circ, \\ u(\circ,y,t) = te^{-y}, \quad u_y(x,\circ,t) = te^{-x}, \\ u(\infty,y,t) = \circ, \quad u_y(x,\infty,t) = \circ \end{cases}$$

حل. برای متغیر x تبدیل فوریه سینوسی و برای متغیر y تبدیل کسینوسی مناسب است. ابتدا نسبت به x

تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم.

$$\mathscr{F}_s(u(x,y,t)) = U(w,y,t) = U(y,t) = U$$
$$U_{tt} = -w^۲U + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}wte^{-y} + U_{yy} - U + e^{-y+t}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{w}{۱+w^۲}$$
$$U(y,\circ) = e^{-y}\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{w}{۱+w^۲}, \quad U_t(y,\circ) = \circ, \quad U_y(\circ,t) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{wt}{۱+w^۲}.$$

حال از این مسئله نسبت به y تبدیل فوریه کسینوسی می‌گیریم.

$$\mathscr{F}_c(U(y,t)) = W(w,\alpha,t) =: W(t) =: W$$
$$W_{tt} = -w^۲W + \frac{۲}{\pi}wt\frac{۱}{۱+\alpha^۲} - \alpha^۲W - W + \frac{۲}{\pi}e^t\frac{۱}{۱+\alpha^۲}\frac{w}{۱+w^۲} - \frac{۲}{\pi}\frac{wt}{۱+w^۲}$$
$$W(\circ) = \frac{۲}{\pi}\frac{w}{۱+w^۲}\frac{۱}{۱+\alpha^۲}, \quad W_t(\circ) = \circ.$$

یا

$$\begin{cases} W_{tt} + (w^۲+\alpha^۲+۱)W + \frac{۲}{\pi}\frac{w}{۱+w^۲}\frac{۱}{۱+\alpha^۲}e^t - \frac{۲}{\pi}\frac{wt}{۱+w^۲} + \frac{۲}{\pi}\frac{wt}{۱+\alpha^۲} = \circ \\ W(\circ) = \frac{۲}{\pi}\frac{w}{۱+w^۲}\frac{۱}{۱+\alpha^۲}, \quad W_t(\circ) = \circ \end{cases}$$

جواب عمومی این معادله می‌شود:

$$W = A\cos\beta t + B\sin\beta t + Ce^t + Dt$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{۱+\alpha^۲+w^۲}$$
$$C = \frac{۲}{\pi}\frac{w}{(۱+\alpha^۲+w^۲)(۱+w^۲)(۱+\alpha^۲)}$$
$$D = \frac{۲}{\pi}\frac{wt}{۱+\alpha^۲+w^۲}\Big(-\frac{۱}{۱+w^۲} + \frac{۱}{۱+\alpha^۲}\Big).$$

حال با استفاده از شرایط اولیه A و B را تعیین می‌کنیم.

$$W(\circ) = A + C = \frac{۲}{\pi}\frac{w}{۱+w^۲}\frac{۱}{۱+\alpha^۲} \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{۲}{\pi}\frac{w}{۱+w^۲}\frac{۱}{۱+\alpha^۲} - C$$
$$W_t(\circ) = \beta B + C + D = \circ \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{۱}{\beta}\Big(C+D\Big).$$

به‌این‌ترتیب جواب نهائی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,y,t) = \frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty}\left(A\cos\beta t + B\sin\beta t + Ce^{t} + Dt\right)$$
$$\cdot \sin wx \cos \alpha y \, dw d\alpha.$$

محاسبه این‌گونه انتگرال‌ها چندان ساده نیست و نیاز به روش‌های انتگرال‌گیری در مبحث توابع مختلط دارد. در این کتاب این شکل انتگرالی جواب را به‌عنوان جواب نهائی می‌پذیریم.

مثال ۴.۲. تبدیل فوریه $f(x) = e^{-ax^{۲}}$، $a > \circ$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(e^{-ax^{۲}}) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^{۲}} e^{iwx}\, dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^{۲}-\frac{iw}{a}x)}\, dx \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{iw}{۲a})^{۲}} e^{-\frac{w^{۲}}{۴a}}\, dx = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{w^{۲}}{۴a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^{۲}}\, dy \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{w^{۲}}{۴a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^{۲}} \frac{۱}{\sqrt{a}}\, dz = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\frac{۱}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi} e^{-\frac{w^{۲}}{۴a}}.\end{aligned}$$

که در آن از نظریه انتگرال‌گیری مختلط و $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{۲}}\, dt = \sqrt{\pi}$ استفاده شده است. پس داریم:

$$\mathscr{F}(e^{-ax^{۲}}) = \frac{۱}{\sqrt{۲a}} e^{-\frac{w^{۲}}{۴a}}.$$

تمرین ۱.۲

۱. انتگرال فوریه توابع زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(x) = e^{-|x|}$

ب) $f(x) = e^{-|x|}\sin x$

۲. انتگرال فوریه سینوسی توابع با دامنه $[0,\infty)$ زیر را به‌دست آورید.

آ) $f(x)=e^{-x}\sin x$　　　ب) $f(x)=e^{-x}\cos x$

۳. انتگرال فوریه کسینوسی توابع با دامنه $[0,\infty)$ زیر را محاسبه کنید.

آ) $f(x)=xe^{-x}$　　　ب) $f(x)=xe^{-x}\cos x$

۴. مطلوبست حل مسئله انتقال حرارت زیر

$$\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}+tu, \qquad -\infty<x<\infty,\ t\geq 0\\
&u(x,0)=e^{-x^2}, \quad u(\pm\infty,t)=0
\end{aligned}$$

۵. مسئله موج یک بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
&u_{tt}-u_{xx}+2u=\delta(x-1)\delta(t), \qquad t\geq 0,\ x\geq 0\\
&u(x,0)=e^{-x}, \quad u_t(x,0)=0, \quad u(0,t)=e^{-t}, \quad u(+\infty,t)=0
\end{aligned}$$

۶. مسئله انتقال حرارت دو بعدی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}+4u_{yy}+u_{xxt}+u+e^t\delta(x-1)e^{-y}, \qquad x,y\geq 0,\ t\geq 0\\
&u(x,y,0)=e^{-x-y^2},\\
&u(0,y,t)=e^{-t-y}, \quad u_y(x,0,t)=e^{-x-t},\\
&u(+\infty,y,t)=0, \quad u(x,+\infty,t)=0
\end{aligned}$$

۷. مطلوبست حل مسئله معادله لاپلاس زیر

$$\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=xe^{-y-z^2}, \qquad 0\leq x\leq 1, y\geq 0,\ |z|<\infty\\
&u(0,y,z)=e^{-y^2-|z|}, \quad u(1,y,z)=0,\\
&u_y(x,0,z)=xe^{-z}\sin z, \quad u(x,+\infty,z)=0, \quad u(x,y,\pm\infty)=0
\end{aligned}$$

۸. مطلوبست حل مسئله رویه مرتعش دو بعدی زیر

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}+u_{xxxx}+u_{xxyy}-u=ye^{-x}t, \qquad\qquad 0\le y\le \pi, x\ge 0,\ t\ge 0\\
&u(x,y,0)=ye^{-x}\sin x, \quad u_t(x,y,0)=0,\\
&u(0,y,t)=yt, \quad u_{xx}(0,y,t)=1, \quad u(+\infty,y,t)=u_{xx}(+\infty,y,t)=0,\\
&u(x,0,t)=te^{-x}, \quad u_y(x,\pi,t)=0
\end{aligned}
$$

۹. مطلوبست حل مسئله زیر

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}-u_{xx}+2u=e^{t-2x}, \qquad\qquad x\ge 0,\ t\ge 0\\
&u(x,0)=e^{-x}, \quad u_t(x,0)=e^{-3x},\\
&u(0,t)=t, \quad u(\infty,t)=0
\end{aligned}
$$

۲.۲ روش دالامبر

مدتی بعد از پیدایش قانون حرکت نیوتن معادله تار مرتعش توسط دالامبر با استفاده از این قانون نوشته و حل شد. اگرچه این روش فقط برای دسته بسیار خاصی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل استفاده است لیکن بهترین روش است. چون دقیق‌ترین جواب مسئله را بر حسب توابع مقدماتی به‌دست می‌دهد. در این بخش به معرفی این روش حل می‌پردازیم که با استفاده از تغییر متغیرهای مستقل انجام می‌پذیرد. در ابتدا مفاهیم مورد نیاز را می‌آوریم.

صورت کلی یک معادله پاره‌ای مرتبه دوم خطی از دو متغیر x و y را به‌شکل زیر در نظر بگیرید.

$$
Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G, \quad (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2 \tag{۱.۲}
$$

که در آن ضرایب و جمله طرف دوم توابعی پیوسته از x و y اند.

این معادله را هذلولوی گوییم اگر روی Ω، $\Delta=B^2-4AC>0$. آن را سهموی گوییم اگر روی Ω، $\Delta=0$ و آن را بیضوی گوییم اگر روی Ω، $\Delta<0$.

معادله مشخصه: معادله دیفرانسیل عادی مرتبه اول زیر را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل پاره‌ای فوق و

هر جواب آن را یک منحنی مشخصه گوییم.

اگر $A \neq 0$ باشد
$$A(\frac{dy}{dx})^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

اگر $A = 0$ و $C \neq 0$ باشد
$$C(\frac{dx}{dy})^2 - B\frac{dx}{dy} = 0$$

نکته. به‌علامت «$-$» قبل از B توجه شود.

از حل معادله مشخصه به‌عنوان یک معادله درجه دوم برای $\frac{dy}{dx}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} \implies \phi(x,y) = c_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A} \implies \psi(x,y) = c_2$$

یا

$$\frac{dx}{dy} = 0 \implies \phi(x,y) = c_1$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{B}{C} \implies \psi(x,y) = c_2.$$

حالت ۱: $\Delta > 0$ یعنی معادله هذلولوی است. در این حالت $\phi(x,y) = c_1$ و $\psi(x,y) = c_2$ دو دسته منحنی در صفحه x و y هستند که مستقل از یکدیگراند. در این حالت بگیرید:

$$\xi = \phi(x,y) \quad , \quad \eta = \psi(x,y)$$

با این تغییر متغیرهای مستقل، معادله دیفرانسیل پاره‌ای به‌صورت زیر در می‌آید.

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{۲.۲}$$

یعنی در این معادله $u_{\xi\xi}$ و $u_{\eta\eta}$ ظاهر نمی‌شود.

چنان‌چه در H_1، u و u_ξ یا u و u_η ظاهر نشده باشد. یعنی:

$$u_{\xi\eta} = H_1(\xi,\eta,u_\eta) \quad \text{یا} \quad u_{\xi\eta} = H_1(\xi,\eta,u_\eta),$$

در این حالات این معادله برای جواب عمومی قابل حل است.

معادله (۲.۲) را فرم کانونیک نوع اوّل معادلات هذلولوی گویند.

مثال ۵.۲. معادله هذلولوی زیر را به‌صورت کانونیک نوع اوّل بنویسید و آن را برای جواب عمومی حل کنید.

$$u_{xx}+۱۰u_{xy}+۹u_{yy}+u_x+u_y=۶۴(y-۵x)$$

حل. معادله مشخصه را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}
&(\frac{dy}{dx})^{۲}-۱۰\frac{dy}{dx}+۹=۰\\
&\frac{dy}{dx}=۵\pm\sqrt{۵^{۲}-۹}=۵\pm۴=۹,۱\\
&\frac{dy}{dx}=۱ \quad\Longrightarrow\quad y-x=c_{۱}\\
&\frac{dy}{dx}=۹ \quad\Longrightarrow\quad y-۹x=c_{۲}.
\end{aligned}$$

پس:

$$\xi=y-x \quad , \quad \eta=y-۹x$$

حال به محاسبه مشتقات نسبی بر حسب متغیرهای جدید می‌پردازیم:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=u_\xi(-۱)+u_\eta(-۹)$$

$$u_x=-u_\xi-۹u_\eta.$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi\cdot۱+u_\eta\cdot۱$$

$$u_y=u_\xi+u_\eta.$$

$$u_{xx}=(u_x)_x=\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_x=\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_\xi\xi_x+\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_\eta\eta_x$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+۱۸u_{\xi\eta}+۸۱u_{\eta\eta}.$$

$$u_{xy}=(u_x)_y=\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_y=\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_\xi\xi_y+\Big(-u_\xi-۹u_\eta\Big)_\eta\eta_y$$

$$u_{xy}=-u_{\xi\xi}-۱۰u_{\xi\eta}-۹u_{\eta\eta}.$$

$$u_{yy}=(u_y)_y=\Big(u_\xi+u_\eta\Big)_y=\Big(u_\xi+u_\eta\Big)_\xi\xi_y+\Big(u_\xi+u_\eta\Big)_\eta\eta_y$$

$$u_{yy}=u_{\xi\xi}+۲u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

از قرار دادن این مشتقات نسبی در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$u_{xx} + ۱۰u_{xy} + ۹u_{yy} + u_x + u_y = (۱ - ۱۰ + ۹)u_{\xi\xi} + (۱۸ - ۱۰۰ + ۱۸)u_{\xi\eta}$$
$$+ (۸۱ - ۹۰ + ۹)u_{\eta\eta} + (-۱ + ۱)u_\xi + (-۹ + ۱)u_\eta.$$

همچنین

$$۶۴(y - ۵x) = ۳۲(\xi + \eta).$$

به‌این‌ترتیب معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$-۶۴u_{\xi\eta} - ۸u_\eta = ۳۲(\xi + \eta)$$

یا

$$u_{\eta\xi} + \frac{۱}{۸}u_\eta = -\left(\frac{۱}{۲}\xi + \frac{۱}{۲}\eta\right)$$

این فرم کانونیک نوع اوّل شرایط حل برای جواب عمومی را دارد. برای حل می‌گیریم.

$$u_\eta = v$$

و معادله می‌شود:

$$v_\xi + \frac{۱}{۸}v = -\left(\frac{۱}{۲}\xi + \frac{۱}{۲}\eta\right).$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی نسبت به ξ و در آن η یک پارامتر است. جواب عمومی آن را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم که ثابت جواب عمومی به η وابسته است.

$$v(\xi, \eta) = C(\eta)e^{-\frac{۱}{۸}\xi} - ۴\xi - ۴\eta + ۳۲$$

پس

$$u_\eta = C(\eta)e^{-\frac{۱}{۸}\xi} - ۴\xi - ۴\eta + ۳۲.$$

حال نسبت به η انتگرال بگیرید.

$$u(\xi, \eta) = \phi(\eta)e^{-\frac{۱}{۸}\xi} - ۴\xi\eta - ۲\eta^۲ + ۳۲\eta + \psi(\xi)$$

که در آن ϕ و ψ توابعی اختیاری هستند. جواب نهائی بر حسب x و y می‌شود:

$$u(x, y) = \phi(y - ۹x)e^{-\frac{x-y}{۸}} + ۴(y - x)(y - ۹x) + ۲(y - ۹x)^۲ - ۳۲(y - ۹x) + \psi(y - x)$$

توابع اختیاری با استفاده از شرایط تکمیلی مسئله قابل تعیین است.

تذکر. با تغییر متغیرهای $\alpha = \frac{۱}{۲}(\xi + \eta)$ و $\beta = \frac{۱}{۲}(\xi - \eta)$ معادله (۲.۲) به‌صورت $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_{۲}(\alpha, \beta, u_{\alpha}, u_{\beta}, u)$ در می‌آید که آن را فرم کانونیک نوع دوم معادلات هذلولوی گویند. از این فرم در بحث‌های نظری استفاده می‌گردد.

حالت ۲: $\Delta = ۰$ یا معادله سهموی است. در این حالت معادله مشخصه به‌صورت تک معادله زیر در می‌آید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{۲A} \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,y) = c_{۱}$$

در این حالت تغییر متغیرها را به‌صورت زیر می‌توان داشت.

$$\xi = \phi(x,y) \quad , \quad \eta = x \quad (\text{یا هر تابع مستقل از } \phi)$$

با این تغییر متغیر معادله (۱.۲) می‌شود:

$$u_{\eta\eta} = H_{۳}(\xi, \eta, u_{\xi}, u_{\eta}, u). \tag{۳.۲}$$

چنان‌چه در $H_{۳}$ مشتق u_{ξ} ظاهر نشود این معادله برای جواب عمومی قابل حل است. این معادله را صورت کانونیک معادله سهموی گویند.

مثال ۲.۶. جواب عمومی معادله سهموی زیر را به‌دست آورید.

$$u_{xx} - ۲u_{xy} + u_{yy} + u_{x} - u_{y} + u = y + ۲x$$

حل. معادله مشخصه را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}
&(\frac{dy}{dx})^{۲} + ۲\frac{dy}{dx} + ۱ = ۰ \\
&\frac{dy}{dx} = -۱ \pm \sqrt{۱^{۲} - ۱} = -۱ \quad \Longrightarrow \quad y + x = c_{۱} \\
&\xi = y + x \quad , \quad \eta = x.
\end{aligned}$$

حال به محاسبه مشتقات نسبی می‌پردازیم.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \cdot ۱ + u_\eta \cdot ۱$$

$$u_x = u_\xi + u_\eta.$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi \cdot ۱ + u_\eta \cdot ۰$$

$$u_y = u_\xi.$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = \left(u_\xi + u_\eta\right)_x = \left(u_\xi + u_\eta\right)_\xi \xi_x + \left(u_\xi + u_\eta\right)_\eta \eta_x$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

$$u_{xy} = (u_x)_y = \left(u_\xi + u_\eta\right)_y = \left(u_\xi + u_\eta\right)_\xi \xi_y + \left(u_\xi + u_\eta\right)_\eta \eta_y$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}.$$

$$u_{yy} = (u_y)_y = \left(u_\xi\right)_y = \left(u_\xi\right)_\xi \xi_y + \left(u_\xi\right)_\eta \eta_y$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}.$$

از قرار دادن این مشتقات در معادله فوق، معادله زیر حاصل می‌گردد.

$$(۱-۲+۱)u_{\xi\xi} + (۲-۲)u_{\xi\eta} + (۱+۰+۰)u_{\eta\eta} + (۱-۱)u_\xi + u_\eta + u = \xi + \eta$$

یا

$$u_{\eta\eta} + u_\eta + u = \xi + \eta.$$

برای حل این معادله که یک معادله دیفرانسیل عادی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت است به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$r^۲ + r + ۱ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱-۴}}{۲} = -\frac{۱}{۲} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$u(\xi,\eta) = e^{-\frac{۱}{۲}\eta}\left[\phi(\xi)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}\eta + \psi(\eta)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}\eta\right]$$

$$u(x,y) = e^{-\frac{۱}{۲}x}\left[\phi(x+y)\cos\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \psi(x)\sin\frac{\sqrt{۳}}{۲}x\right]$$

ϕ و ψ توابع اختیاری هستند و با اعمال شرایط تکمیلی همراه معادله قابل تعیین است.

حالت ۳: $\Delta < 0$ یا معادله از نوع بیضوی است.

در این حالت از حل معادله مشخصه به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{-\Delta}}{2A} \implies \phi(x,y) = c_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{-\Delta}}{2A} \implies \psi(x,y) = c_2$$

در این‌صورت متغیرهای جدید یعنی $\xi = \phi(x,y)$ و $\eta = \psi(x,y)$ مختلط اند. پس مشتق تابع حقیقی نسبت به آنها معنی ندارد. برای رفع این مشکل متغیرهای جدید را به‌صورت زیر می‌گیریم که حقیقی هستند.

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \quad , \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta)$$

بر حسب این متغیرها معادله (۱.۲) به‌صورت زیر در می‌آید.

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u_\alpha, u_\beta, u)$$

این معادله را فرم کانونیک معادلات بیضوی گویند. از این فرم در بحث‌های نظری استفاده می‌گردد.

تذکر. ۱) موج یک بعدی از نوع هذلولوی است.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

۲) معادله حرارت یک بعدی از نوع سهموی است.

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

۳) معادله لاپلاس دو بعدی از نوع بیضوی است.

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

تذکر. معمولاً معادلات هذلولوی با یکی از دو شرایط تکمیلی زیر همراه است.

۱) تابع مجهول و مشتق آن برای یکی از دو متغیر x یا y برای $x = x_0$ یا $y = y_0$ داده می‌شود. این شرایط تکمیلی را شرایط کشی و معادله همراه با این شرایط را مسئله کشی گویند. شرایط کشی نسبت به زمان را شرایط اولیه گویند.

۲) مقدار تابع مجهول روی یکی از منحنی‌های مشخصه و همچنین روی یک منحنی صعودی دیگر داده می‌شود. این شرایط تکمیلی را شرایط گورسا و معادله همراه با این شرایط را مسئله گورسا گویند.

مثال ۷.۲. مطلوبست حل مسئله کشی زیر

$$\begin{cases} u_{xx}+۱۰u_{xy}+۹u_{yy}+u_x+u_y=۶۴(y-۵x), & -\infty<x<\infty,\ y\geq ۰\\ u(x,۰)=x^۲, \quad u_y(x,۰)=x \end{cases}$$

در مثال ۵.۲ این بخش جواب عمومی را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم.

$$u(x,y)=\phi(y-۹x)e^{-\frac{x-y}{۸}}+۴(y-x)(y-۹x)+۲(y-۹x)^۲-۳۲(y-۹x)+\psi(y-x).$$

حال شرایط کشی را اعمال کنیم.

$$u(x,۰)=\phi(-۹x)e^{-\frac{۱}{۸}x}+۳۶x^۲+۱۶۲x^۲+۲۸۸x+\psi(-x)=x^۲$$
$$u_y(x,۰)=\phi'(-۹x)e^{-\frac{۱}{۸}x}+\frac{۱}{۸}\phi(-۹x)e^{-\frac{۱}{۸}x}-۴۰x-۳۶x-۳۲+\psi'(-x)=x$$

این دو معادله را می‌بایستی برای ϕ و ψ حل کنیم. برای این‌کار ψ را بین دو معادله حذف می‌کنیم. با مشتق‌گیری از معادله اوّل نسبت به x و جمع آن با معادله دوم به‌دست می‌آوریم.

$$-۸\phi'(-۹x)e^{-\frac{۱}{۸}x}=۳۲۰x+۲۵۶-۳x$$

یا

$$\phi'(-۹x)=\left(-\frac{۳۱۷}{۸}x-۳۲\right)e^{\frac{۱}{۸}x}$$

یا

$$\phi'(\eta)=\left(\frac{۳۱۷}{۷۲}\eta-۳۲\right)e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}$$

یا

$$\phi(\eta)=\int\left(\frac{۳۱۷}{۷۲}\eta-۳۲\right)e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}d\eta=\left(\frac{۳۱۷}{۷۲}\eta-۳۲\right)(-۷۲)e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}$$
$$+\int ۳۱۷e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}d\eta=(-۳۱۷\eta+۱۹۸۷)e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}+A.$$

$$\phi(\eta)=(-۳۱۷\eta+۱۹۸۷)e^{-\frac{۱}{۷۲}\eta}+A$$
$$\psi(\xi)=-۱۹۷\xi^۲-۲۸۸\xi-\phi(-۹\xi)e^{\frac{۱}{۴}\xi}-Ae^{\frac{۱}{۸}\xi}$$
$$\psi(\xi)=(-۲۸۵۳\xi+۱۹۸۷)e^{\frac{۱}{۴}\xi}-۱۹۷\xi^۲-۲۸۸\xi+Ae^{\frac{۱}{۸}\xi}.$$

به‌این‌ترتیب جواب نهائی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$u(x,y)=\left\{\left(-۳۱۷(y-۹x)+۱۹۸۷\right)e^{-\frac{۱}{۷۲}(y-۹x)}+A\right\}e^{-\frac{۱}{۸}(x-y)}$$
$$+۴(y-x)(y-۹x)+۲(y-۹x)^۲-۳۲(y-۹x)+\left[\left(-۲۸۵۳(y-x)\right.\right.$$
$$\left.\left.+۱۹۸۷\right)e^{\frac{۱}{۴}(y-x)}-۱۹۷(y-x)^۲-۲۸۸(y-x)-Ae^{\frac{۱}{۸}(y-x)}\right].$$

مثال ۸.۲. مطلوبست حل مسئله گورسای زیر

$$\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}+u_x-u_y=y-x \\ u(x,y)=۲x, & \text{روی } y-x=۰ \\ u(x,y)=\frac{۱}{۲}x^۲, & \text{روی } y=۲x \end{cases}$$

حل. معادله مشخصه عبارت است از $(\frac{dy}{dx})^۲-۱=۰$ یا $\frac{dy}{dx}=\pm۱$.

$$\frac{dy}{dx}=۱ \implies y-x=c_۱$$
$$\frac{dy}{dx}=-۱ \implies y+x=c_۲$$

پس

$$\xi=y-x \quad , \quad \eta=y+x$$

در نتیجه

$$u_x=-u_\xi+u_\eta.$$
$$u_y=u_\xi+u_\eta.$$
$$u_{xx}=u_{\xi\xi}-۲u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$
$$u_{yy}=u_{\xi\xi}+۲u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

از قرار دادن آنها در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
&-4u_{\xi\eta}-2u_{\xi}=\xi\\
&u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_{\xi}=-\frac{1}{4}\xi.\\
&u_{\xi}=v,\quad v_{\eta}+\frac{1}{2}v=-\frac{1}{4}\xi\\
&v=C(\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}-\frac{1}{2}\xi,\quad u_{\xi}=C(\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}-\frac{1}{2}\xi\\
&u(\xi,\eta)=\phi(\xi)e^{-\frac{1}{2}\eta}-\frac{1}{2}\xi\eta+\psi(\eta).
\end{aligned}
$$

یا

$$u(x,y)=\phi(y-x)e^{-\frac{1}{2}(y+x)}-\frac{1}{2}(y^2-x^2)+\psi(y+x).$$

حال شرایط گورسا را اعمال کنیم.

$$
\begin{aligned}
&u(x,x)=\phi(0)e^{-x}+4\psi(2x)=2x\\
&u(x,2x)=\phi(x)e^{-\frac{3}{2}x}-\frac{3}{2}x^2+\psi(3x)=\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}
$$

از معادله اوّل به‌دست می‌آوریم.

$$\psi(\eta)=\eta-\phi(0)e^{-\frac{1}{2}\eta}$$

از قرار دادن آن در معادله دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\phi(\xi)=\left(2\xi^2+\frac{3}{2}\xi+\phi(0)e^{-\frac{3}{2}\xi}\right)e^{\frac{3}{2}\xi}$$

یا

$$\phi(\xi)=\left(2\xi^2+\frac{3}{2}\xi\right)e^{\frac{3}{2}\xi}+\phi(0).$$

به‌این‌ترتیب

$$
\begin{aligned}
u(x,y)=&\left[2(y-x)^2+\frac{3}{2}(y-x)\right]e^{\frac{3}{2}(y-x)}e^{-\frac{1}{2}(y+x)}+\phi(0)e^{-\frac{1}{2}(y-x)}\\
&-\frac{1}{2}(y^2-x^2)+(y+x)-\phi(0)e^{-\frac{1}{2}(y+x)}
\end{aligned}
$$

یا

$$u(x,y)=\left[2(y-x)^2+\frac{3}{2}(y-x)\right]e^{y-2x}+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+(y+x).$$

مثال ۹.۲. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه زیر

$$\begin{cases} u_{tt} - c^{۲} u_{xx} = ۰, & t \geq ۰, -\infty < x < \infty \\ u(x,۰) = f(x), \quad u_t(x,۰) = g(x) \end{cases}$$

حل. معادله مشخصه را به‌صورت زیر داریم:

$$(\frac{dx}{dt})^{۲} - c^{۲} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm c$$

پس

$$x - ct = c_۱ \quad , \quad x + ct = c_۲$$

و

$$\xi = x - ct \quad , \quad \eta = x + ct.$$

در نتیجه

$$u_x = u_\xi + u_\eta.$$
$$u_t = c(u_\eta - u_\xi).$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$
$$u_{tt} = c^{۲}(u_{\xi\xi} - ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}).$$

از قرار دادن آنها در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$-۴c^{۲} u_{\xi\eta} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad u_{\xi\eta} = ۰$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت زیر است.

$$u(\xi,\eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

یا

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct).$$

حال شرایط اولیه را اعمال کنیم.

$$u(x,۰) = \phi(x) + \psi(x) = f(x)$$
$$u_t(x,۰) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x).$$

با انتگرال‌گیری از معادله دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\phi(x) - \psi(x) = -\frac{۱}{c}\int_{۰}^{x} g(s)\,ds + A.$$

از حل این معادله و معادله اوّل دستگاه فوق به‌دست می‌آوریم.

$$\phi(x) = \frac{۱}{۲}f(x) - \frac{۱}{۲c}\int_{۰}^{x} g(s)\,ds - \frac{A}{۲}$$
$$\psi(x) = \frac{۱}{۲}f(x) + \frac{۱}{۲c}\int_{۰}^{x} g(s)\,ds + \frac{A}{۲}.$$

به‌این‌ترتیب جواب نهائی به‌صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\Big[f(x-ct) + f(x+ct)\Big] + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

تذکر. ۱) این جواب به جواب دالامبر معادله موج معروف است.

۲) روش دالامبر که در این بخش ارائه شد فقط برای معادلات هذلولوی یا معادله موج یک بعدی کارایی خوب دارد و حل معادله حرارت و لاپلاس یا معادلات حاوی دو متغیر مکان یا بیشتر مفید نیست.

۳) اگر f و g فرد باشد در این‌صورت $u(x,t)$ نسبت به x فرد است.

۴) اگر f و g زوج باشد در این‌صورت $u(x,t)$ نسبت به x زوج است.

تمرین ۲.۲

۱. ناحیه‌هایی که هر یک از معادلات زیر در آنها از نوع هذلولوی، سهموی و یا بیضوی است تعیین کنید.

آ) $u_{xx} + yu_{yy} + u_x - u = x$

ب) $x^۲u_{xx} + y^۲u_{xy} - u_{yy} + xu = y^۲$

ج) $u_{xx} + xyu_{xy} + u_{yy} + u = x^۲$

د) $u_{xx} - yu_{xy} + yu_{yy} + u_x + u = x$

۲. منحنی‌های مشخصه هر یک از معادلات زیر را بیابید.

آ) $u_{xy} + ۲u_{yy} + ۴u_x - ۵u_y + u = e^x$

ج) $u_{yy} - u_{xy} + u_x - ۲u_y = e^{x+y}$

ب) $u_{xx} - ۲u_{xy} + u_{yy} - ۳u = xy$

د) $u_{xy} + u_x + ۲u_y + u = x - y$

۳. هر یک از معادلات را به‌شکل کانونیک در آورید.

آ) $u_{xx} - x^۲u_{yy} + u_x - u_y + u = xy$.

ب) $yu_{xx} - yu_{yy} - ۲u_y + u_x = x - y$.

ج) $x^۲u_{xx} + ۴xyu_{xy} + y^۲u_{yy} + u_x - u = x^۲$.

د) $e^xu_{xx} - e^yu_{yy} + u_x + u = xe^x$.

۴. مطلوبست حل مسائل کشی زیر

آ)
$$\begin{cases} u_{xx} + ۱۰u_{xy} + ۹u_{yy} = x - y, \\ u(x,۰) = x^۲, \quad u_y(x,۰) = x \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} ۴u_{xx} + ۵u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = ۲x + y, \\ u(x,۰) = x^۲, \quad u_y(x,۰) = x^۴ \end{cases}$$

ج)
$$\begin{cases} ۳u_{xx} + ۱۰u_{xy} + ۳u_{yy} = ۲x - ۳y, \\ u(x,۰) = x, \quad u_y(x,۰) = e^x \end{cases}$$

د)
$$\begin{cases} u_{xx} - ۳u_{xy} + ۲u_{yy} + u_x - u_y = xy, \\ u(x,۰) = e^x, \quad u_y(x,۰) = ۱ \end{cases}$$

۵. مسائل گورسا زیر را حل کنید.

آ) $$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} = xy, \\ u(x,y) = -y^{۲}, & y + x = ۰ \text{ روی} \\ u(x,y) = x^{۲}, & y = x \text{ روی} \end{cases}$$

ب) $$\begin{cases} u_{xx} + ۳u_{xy} + ۲u_{yy} + u_x - u_y = xy, \\ u(x,y) = x - y, & y + x = ۰ \text{ روی} \\ u(x,y) = -۲x - y, & y = x^{۳} \text{ روی} \end{cases}$$

۳.۲ مروری بر روش تبدیلات فوریه و روش دالامبر

در دو بخش این فصل دو روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان بیکران ارائه نمودیم.

۱. روش تبدیلات فوریه (نامتناهی)

۲. روش دالامبر

در این بخش مروری بر بکارگیری آن‌ها خواهیم داشت. قبل از اینکه به بحث در مورد بکارگیری هر یک از این دو روش با جزییات کامل بپردازیم، در اینجا تفاوت اساسی آن‌ها را بیان می‌کنیم.

روش تبدلات فوریه برای هر سه نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل اعمال است مشروط بر اینکه شرایط استفاده از آن در مسئله باشد لیکن محاسبه انتهایی و تعیین جواب نهایی از روی تبدیل جواب چندان ساده نیست. روش دالامبر فقط برای دسته خاصی از معادلات پاره‌ای یعنی معادلات هذلولوی قابل اعمال است لیکن بکارگیری آن آسان‌تر و محاسبات نیز مقدماتی است.

روش حل با تبدیلات فوریه (نامتناهی): برای تشخیص مقدماتی اعمال این روش به دو نکته اولیه زیر توجه کنید:

نکته ۱. دامنه متغیری که می‌خواهیم برای آن تبدیلات فوریه (نامتناهی) را اعمال کنیم باید بیکران باشد. مثلاً $۰ < x < \infty$ یا $-\infty < x < \infty$ باشد.

نکته ۲. تابع‌های داده شده در مسئله نسبت به متغیر x روی دامنه x انتگرال‌پذیر باشند یا مقدار انتگرال قدر مطلق آن‌ها کمتر از بینهایت باشد.

اگر این دو نکته برقرار باشد، تابع مجهول نسبت به x دارای تبدیل فوریه و انتگرال فوریه است و با این روش می‌تواند قابل‌حل باشد.

از روی هر پایه (یا تبدیل فوریه متناهی) می‌توان یک تبدیل فوریه (نامتناهی) به‌دست آورد که مسئله دارای دو نکته فوق را حل کند. این مطلب تحت عنوان "تبدیلات اشترم-لیوویل" در مرجع [۱] آمده‌است. لیکن جزء سرفصل این کتاب نیست. در بخش تبدیلات فوریه، سه نوع تبدیلات فوریه را بیان کردیم. این سه نوع تبدیل و انتگرال فوریه آن‌ها را در اینجا یادآوری می‌کنیم.

تبدیل فوریه سینوسی: این تبدیل را به‌صورت زیر داریم:

تبدیل فوریه

$$\mathscr{F}_s(f)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx=F_s(\omega)$$

تبدیل مشتقات از مرتبه ۲

$$\mathscr{F}_s(f'')=-\omega^{۲}\mathscr{F}_s(f)+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega f(۰)$$

تبدیل معکوس یا انتگرال فوریه

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} F_s(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

تذکر. از این تبدیل تحت شرایط زیر می‌توان استفاده نمود.

۱) نکته ۱ و نکته ۲ فوق برقرار و دامنه متغیر x به‌صورت $۰<x<\infty$ باشد.

۲) در معادله نسبت به x مشتق از مرتبه فرد ظاهر نشده‌باشد.

۳) شرط مرزی نسبت به x در $x=۰$ برای مقدار تابع مجهول و مشتقات از مرتبه زوج آن داده‌شده‌باشد.

نکته ۳. چنانچه مشتق از مرتبه ۴ نسبت به x در معادله ظاهر شده‌باشد، $\mathscr{F}_s^{(۴)}(f)$ از روی تبدیل فوریه سینوسی f'' به روش تکراری مقدور است.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_s(f^{(۴)})&=-\omega^{۲}\mathscr{F}_s(f'')+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega f''(۰)\\&=\omega^{۴}\mathscr{F}_s(f)-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega^{۳}f(۰)+\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega f''(۰)\end{aligned}$$

تبدیل فوریه کسینوسی: این تبدیل به‌صورت زیر است:

تبدیل فوریه
$$\mathscr{F}_c(f) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = F(\omega)$$

تبدیل مشتقات از مرتبه ۲
$$\mathscr{F}_c(f'') = -\omega^{۲} \mathscr{F}_c(f) - \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \omega f'(۰)$$

تبدیل معکوس یا انتگرال فوریه
$$f(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{۰}^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

تذکر. کاربرد این تبدیل برای حل مسائل تحت شرایط مشابه تبدیل فوریه سینوسی با یک استثنا است که در زیر بیان می‌شود.

استثنا: برای تبدیل فوریه کسینوسی می‌بایستی مقدار مشتقات از مرتبه فرد در مبدأ داده‌شود.

تبدیل فوریه: این تبدیل برای $-\infty < x < \infty$ قابل اعمال و به‌صورت زیر است:

تبدیل فوریه
$$\mathscr{F}(f) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, e^{i\omega x} \, dx = F(x)$$

تبدیل مشتقات
$$\mathscr{F}(f^{(n)}) = (-i\omega)^n \mathscr{F}(f) \quad \text{و} \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

تذکر. این تبدیل تحت نکته ۱ و نکته ۲ و بدون هیچ قیدی قابل استفاده است.

نکته ۴. چنانچه تابع‌های آمده در مسئله دارای هر یک از تبدیلات فوق باشند، دراین‌صورت مقدار جواب و کلیه مشتقات آن در $\pm\infty$ برابر صفر است.

در اینجا یک مثال می‌آوریم.

مثال ۲.۱۰. مطلوبست حل مسئله زیر

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + u_{ttxx} - u_{xxxx} - u + te^{-x}, \qquad t \geq 0, x \leq 0 \\
&u(x,0) = e^{-x}, \quad u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}, \\
&u(0,t) = t, \quad u_{xx}(0,t) = 1.
\end{aligned}
$$

حل. ابتدا توجه کنید که نکته ۱ و نکته ۲ برقرار است. همچنین شرایط مرزی برای تابع مجهول و مشتق مرتبه دوم آن نسبت به x در $x = 0$ داده‌شده و در معادله مشتق فرد نداریم. پس تبدیل فوریه سینوسی مناسب حل این مسئله است. درنتیجه از معادله نسبت به x تبدیل فوریه سینوسی می‌گیریم. برای سادگی می‌گیریم

$$\mathscr{F}_s(u(x,t)) = U(\omega,t) = U(t) = U.$$

در اینجا نسبت به t مشتق و نسبت به x انتگرال می‌گیریم. پس تعویض ترتیب آن‌ها مقدور است. یعنی

$$\mathscr{F}_s(u_{tt}) = U_{tt}.$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_s(u_{xx}) &= -\omega^{۲}\mathscr{F}_s(u) + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega t \\
&= -\omega^{۲}U + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega t, \\
\mathscr{F}_s(u_{ttxx}) &= \mathscr{F}_s\Big((u_{xx})_{tt}\Big) = \Big(\mathscr{F}_s(u_{xx})\Big)_{tt} = \Big(-\omega^{۲}U + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}wt\Big)_{tt} \\
&= -\omega^{۲}U_{tt}, \\
\mathscr{F}\,(u_{xxxx}) &= \omega^{۴}\mathscr{F}_s(u) - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega^{۳}t + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega \\
&= \omega^{۴}U - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega^{۳}t + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega, \\
\mathscr{F}_s(e^{-x}) &= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,dx = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^{۲}}, \\
U(\circ) = U(\omega,\circ) &= \mathscr{F}_s(u(x,\circ)) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{\infty} e^{-x}\sin\omega x\,dx \\
&= \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^{۲}}.
\end{aligned}$$

توجه کنید انتگرال فوق تبدیل لاپلاس سینوسی برای $s=۱$ و $a=\omega$ است.

$$\begin{aligned}
U_t(\circ) = U_t(\omega,\circ) &= \mathscr{F}_s(u_t(x,\circ)) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{\circ}^{۱}\sin\omega x\,dx \\
&= -\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\cos\omega x}{\omega}\Bigg|_{\circ}^{۱} = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{(۱-\cos\omega x)}{\omega}.
\end{aligned}$$

از قرار دادن این مقادیر در مسئله، مسئله برای متغیر t به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
U_{tt} = -\omega^{۲}U &+ \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega t - \omega^{۲}U_{tt} - \omega^{۴}U + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega^{۳}t - \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega \\
&- U + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^{۲}}t, \\
U(\circ) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}&\frac{\omega}{۱+\omega^{۲}}, \quad U_t(\circ) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{(۱-\cos\omega x)}{\omega}.
\end{aligned}$$

معادله U را به‌صورت زیر داریم:

$$(۱+\omega^۲)U_{tt}+(۱+\omega^۲+\omega^۴)U=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\left(\omega^۳+\omega+\frac{\omega}{۱+\omega^۲}\right)-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega.$$

با تعریف $\alpha^۲=:۱+\omega^۲$، $\beta^۲=:۱+\omega^۲+\omega^۴$، $a=:\omega^۳+\omega+\frac{\omega}{۱+\omega^۲}$ و $b=:-\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\omega$، معادله فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\alpha^۲U_{tt}+\beta^۲U=at+b.$$

معادله مشخصه معادله فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha^۲r^۲+\beta^۲=۰ \quad\Rightarrow\quad r=\pm\frac{\beta}{\alpha}i$$

در نتیجه

$$U=A\cos\frac{\beta}{\alpha}t+B\sin\frac{\beta}{\alpha}t+\frac{a}{\beta^۲}t+\frac{b}{\beta^۲}.$$

با اعمال شرایط اولیه به‌دست می‌آوریم

$$U(۰)=A+\frac{b}{\beta^۲}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^۲} \quad\Rightarrow\quad A=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^۲}-\frac{b}{\beta^۲},$$

$$U_t(۰)=\frac{\beta}{\alpha}B+\frac{a}{\beta^۲}=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{(۱-\cos\omega x)}{\omega}$$

$$\Rightarrow\quad B=\frac{\alpha}{\beta}\left[\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{۱-\cos\omega x}{\omega}-\frac{a}{\beta^۲}\right].$$

از قرار دادن A و B در جواب عمومی U به‌دست می‌آوریم

$$U=U(\omega,t)=\left(\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\omega}{۱+\omega^۲}-\frac{b}{\beta^۲}\right)\cos\frac{\beta}{\alpha}t$$
$$+\frac{\alpha}{\beta}\left[\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{(۱-\cos\omega x)}{\omega}-\frac{a}{\beta^۲}\right]\sin\frac{\beta}{\alpha}t+\frac{a}{\beta^۲}t+\frac{b}{\beta^۲}.$$

حال از رابطه فوق تبدیل معکوس می‌گیریم تا جواب مسئله اولیه به‌دست‌آید. پس

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_۰^\infty U(\omega,t)\sin\omega x\,d\omega.$$

جواب نهایی مسئله را به همین صورت می‌پذیریم. محاسبه این نوع انتگرال‌ها با روش نیوتن یا به‌دست‌آورن تابع اولیه چندان مقدور نیست. لیکن با استفاده از مباحث انتگرال مختلط و نظریه مانده بعضاً قابل محاسبه است.

حل با روش دالامبر : همانطوریکه قبلاً گفتیم روش دالامبر اولین، بهترین و دقیق‌ترین روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. لیکن با توجه به قیدهای زیر که روی این روش است، اعمال آن فقط برای خانواده کوچکی از معادلات پاره‌ای قابل اعمال است.

۱. معادله خطی و از مرتبه دوم و فقط حاوی دو متغیر مستقل باشد.

۲. دامنه متغیرهای مستقل بیکران، یکی از آن‌ها با دامنه $(-\infty,\infty)$ و دامنه دیگری $[0,\infty)$ باشد و شرط تکمیلی فقط با متغیر با دامنه $[0,\infty)$ و به‌صورت شرط اولیه و یا شرط کشی در صفر باشد، یا شرط گورسا باشد.

۳. معادله از نوع هذلولوی یا موج باشد.

نکته. قیدی روی تابع‌های داده‌شده در مسئله نیست.

تعریف ۲.۱. معادله مرتبه دوم از دو متغیر مستقل x و y

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G(x,y) \tag{۲.۴}$$

را در نظر بگیرید. ضرایب معمولاً ثابت‌اند ولی می‌توانند تابعی از x و y نیز باشند.

آ) این معادله را هذلولوی می‌گوییم اگر $\Delta=B^2-4AC>0$.

ب) این معادله را سهموی می‌گوییم اگر $\Delta=0$.

ج) این معادله را بیضوی می‌گوییم اگر $\Delta<0$.

معادله مرتبه اول

$$A\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2-B\frac{dy}{dx}+C=0 \tag{۲.۵}$$

را معادله مشخصه معادله (۲.۴) می‌گوییم.

تذکر. ۱) به علامت منفی قبل از B در معادله (۵.۲) توجه کنید.

۲) اگر $A = ۰$ و $C \neq ۰$ باشد، معادله مشخصه را به‌صورت زیر می‌گیریم:

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲ - B\frac{dx}{dy} = ۰$$

از حل معادله (۵.۲) برای $\frac{dy}{dx}$ به دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{۲A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{۲A}.$$

برای حالت هذلولوی $\Delta > ۰$ است. از حل این معادلات جواب عمومی آن‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{۲A} \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y) = c_۱,$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{۲A} \quad \Rightarrow \quad \psi(x,y) = c_۲.$$

حال تغییر متغیر مستقل به‌صورت زیر می‌دهیم:

$$\xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y)$$

با اعمال این تغییر متغیرهای مستقل معادله (۴.۲) به‌صورت

$$u_{\xi\eta} = H_۱(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

درمی‌آید. یعنی مشتق $u_{\xi\xi}$ و $u_{\eta\eta}$ نداریم.

نکته. اگر ضرایب (۴.۲) ثابت باشد، این معادله با ضرایب ثابت است. اگر در معادله فوق u و u_ξ نباشد، یعنی $u_{\xi\eta} = H_۱(\xi,\eta,u_\eta)$ یا اگر در آن u و u_η نباشد، یعنی $u_{\xi\eta} = H_۱(\xi,\eta,u_\xi)$، دراین‌صورت این معادله برای جواب عمومی قابل‌حل است.

روش حل: فرض کنید $u_{\xi\eta} = H_۱(\xi,\eta,u_\eta)$ باشد. بگیرید $u_\eta = v$. آنگاه این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$v_\xi = H_۱(\xi,\eta,v)$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی با متغیر مستقل ξ و پارامتر η و خطی است. پس به‌سادگی قابل‌حل است. از حل آن به‌دست می‌آوریم

$$u_\eta = v(\xi,\eta).$$

حال اگر نسبت به η انتگرال بگیریم، $u(\xi,\eta)$ کاملاً مشخص می‌شود. به‌جای ξ مقدار $\phi(x,y)$ و به‌جای η مقدار $\psi(x,y)$ را قرار می‌دهیم. دراین‌صورت جواب نهایی مسئله به‌دست می‌آید. با اعمال شرایط تکمیلی جواب یگانه مسئله مشخص می‌شود.

مثال ۲.۱۱. مطلوبست حل مسئله با شرایط کشی زیر

$$\begin{aligned} &u_{xx} + ۵u_{xy} + ۶u_{yy} + u_x + ۲u_y = x + y, \\ &u(x,۰) = x, \quad u_y(x,۰) = x + ۲. \qquad \text{شرایط کشی} \end{aligned}$$

حل. معادله مشخصه معادله فوق به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲ - ۵\frac{dy}{dx} + ۶ = ۰, \\ &\quad\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۲۴}}{۲} = \frac{۵ \pm ۱}{۲} = ۲,۳. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = ۲ \quad \Rightarrow \quad y = ۲x + c_۱ \quad \Rightarrow \quad y - ۲x = c_۱, \\ &\frac{dy}{dx} = ۳ \quad \Rightarrow \quad y = ۳x + c_۲ \quad \Rightarrow \quad y - ۳x = c_۲. \end{aligned}$$

بگیرید

$$\xi = y - ۲x, \quad \eta = y - ۳x.$$

حال باید مشتقات u برحسب x و y را برحسب ξ و η به‌دست‌آوریم. ابزار این کار قاعده زنجیره‌ای مشتق است.

$$\begin{aligned} &u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi(-۲) + u_\eta(-۳), \\ &u_x = -۲u_\xi - ۳u_\eta. \end{aligned} \tag{۲.۶}$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi(+۱) + u_\eta(+۱),$$
$$u_y = u_\xi + u_\eta. \qquad (۷.۲)$$

اکنون با استفاده از این مشتقات مرتبه اول، مشتقات مرتبه دوم را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_x)_x = (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_x \\ &= (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_\xi \xi_x + (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_\eta \eta_x \\ &= (-۲u_{\xi\xi} - ۳u_{\eta\xi})(-۲) + (-۲u_{\xi\eta} - ۳u_{\eta\eta})(-۳), \\ u_{xx} &= ۴u_{\xi\xi} + ۱۲u_{\xi\eta} + ۹u_{\eta\eta}. \end{aligned} \qquad (۸.۲)$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= (u_x)_y = (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_y \\ &= (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_\xi \xi_y + (-۲u_\xi - ۳u_\eta)_\eta \eta_y \\ &= (-۲u_{\xi\xi} - ۳u_{\eta\xi})(+۱) + (-۲u_{\xi\eta} - ۳u_{\eta\eta})(+۱), \\ u_{xy} &= -۲u_{\xi\xi} - ۵u_{\xi\eta} - ۳u_{\eta\eta}. \end{aligned} \qquad (۹.۲)$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= (u_y)_y = (u_\xi + u_\eta)_y \\ &= (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y \\ &= (u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi})(+۱) + (u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})(+۱), \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} + ۲u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{aligned} \qquad (۱۰.۲)$$

از (۶.۲) u_x، از (۷.۲) u_y، از (۸.۲) u_{xx}، از (۹.۲) u_{xy}، و از (۱۰.۲) u_{yy} به‌دست می‌آید. با قرار دادن این مشتقات در معادله اصلی خواهیم داشت

$$۰ . u_{\xi\xi} + (-۱)\, u_{\xi\eta} + ۰ . u_{\eta\eta} + ۰ . u_\xi + (-۱)\, u_\eta = x + y$$

یا

$$u_{\xi\eta} + u_\eta = -x - y.$$

حال $-x-y$ را نیز برحسب ξ و η محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{array}{lll} y-۲x=\xi & & x=\xi-\eta \\ & \Rightarrow & \qquad\qquad \Rightarrow \quad x+y=۴\xi-۳\eta \\ y-۳x=\eta & & y=۳\xi-۲\eta \end{array}$$

درنتیجه معادله برحسب ξ و η به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u_{\xi\eta}+u_\eta=-۴\xi+۳\eta$$

قرار دهید $u_\eta=v$ تا به‌دست آورید

$$v_\xi+v=-۴\xi+۳\eta.$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل عادی با تابع مجهول v و متغیر مستقل ξ است. جواب عمومی این معادله به‌صورت زیر است:

$$v=C(\eta)\,e^{-\xi}-۴\xi+۳\eta+۴$$

پس

$$u_\eta=C(\eta)\,e^{-\xi}-۴\xi+۳\eta+۴.$$

درنتیجه،

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta)&=\phi(\eta)\,e^{-\xi}-۴\xi\eta+\frac{۳}{۲}\eta^۲+۴\eta+\psi(\xi) \\ u(x,y)&=\phi(y-۳x)\,e^{-(y-۲x)}-۴(y-۲x)(y-۳x)+\frac{۳}{۲}(y-۳x)^۲ \\ &\qquad +۴(y-۳x)+\psi(y-۲x) \end{aligned}$$

به‌طوری‌که در آن $\phi(\eta)$ تابع اولیه $C(\eta)$ و توابع C و ψ توابع اختیاری جواب عمومی هستند.

حال باید شرایط کشی را اعمال کنیم تا این توابع ϕ و ψ را به‌دست آوریم. پس

$$u(x,\circ)=x \quad \Rightarrow \quad \phi(-۳x)\,e^{۲x}-۲۴x^۲+\frac{۲۷}{۲}x^۲-۱۲x+\psi(-۲x)=x$$

و

$$u_y(x,۰)=x+۲ \quad \Rightarrow \quad \phi'(-۳x)\,e^{۲x}-\phi(-۳x)\,e^{۲x}+۲۰x-۹x+۴$$
$$+\psi'(-۲x)=x+۲$$

که در اینجا $\phi'=\frac{d\phi}{d\eta}$ و $\psi'=\frac{d\psi}{d\xi}$. این دو معادله را باید برای ϕ و ψ حل کنیم. برای این کار از معادله اولی نسبت به x مشتق می‌گیریم تا معادله اول زیر به‌دست آید:

$$-۳\phi'(-۳x)e^{۲x}+۲\phi(-۳x)e^{۲x}-۲۱x-۱۲-۲\psi'(-۲x)=۱.$$

معادله دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$۲\phi'(-۳x)\,e^{۲x}-۲\phi(-۳x)\,e^{۲x}+۲۲x+۸+۲\psi'(-۲x)=۲x+۴.$$

از جمع دو معادله فوق به‌دست می‌آوریم:

$$-\phi'(-۳x)\,e^{۲x}+x-۴=۲x+۵$$

یا

$$\phi'(-۳x)=-(x+۹)\,e^{-۲x}.$$

حال بگیرید $\eta=-۳x$ یا $x=-\frac{\eta}{۳}$. بنابراین

$$\phi'(\eta)=-(-\frac{\eta}{۳}+۹)e^{\frac{۲}{۳}\eta}.$$

در نتیجه

$$\phi(\eta)=-\int(-\frac{\eta}{۳}+۹)\,e^{\frac{۲}{۳}\eta}\,d\eta=-\frac{۳}{۲}(-\frac{\eta}{۳}+۹)\,e^{\frac{۲}{۳}\eta}-\frac{۱}{۳}\int e^{\frac{۲}{۳}\eta}\,d\eta$$
$$=\left(\frac{\eta}{۲}-\frac{۵۷}{۴}\right)e^{\frac{۲}{۳}\eta}+A.$$

از رابطه $u(x,۰)=x$ به‌دست می‌آوریم:

$$\psi(-۲x)=-\phi(-۳x)\,e^{۲x}+\frac{۲۱}{۲}x^{۲}+۱۳x.$$

از ϕ فوق استفاده کنیم:

$$\psi(-۲x)=\left[\frac{۵۷}{۴}+\frac{۳}{۲}x\right]e^{-۲x}.\,e^{۲x}-A\,e^{۲x}+\frac{۲۱}{۲}x^{۲}+۱۳x$$

یا

$$\psi(-۲x) = +\frac{۲۱}{۲}x^۲ + \frac{۲۹}{۲}x + \frac{۵۷}{۴} - Ae^{۲x}.$$

حال بگیرید $-۲x = \xi$ یا $x = -\frac{\xi}{۲}$ تا به‌دست آورید:

$$\psi(\xi) = \frac{۲۱}{۸}\xi^۲ - \frac{۲۹}{۴}\xi + \frac{۵۷}{۴} - Ae^{-\xi}.$$

پس جواب نهایی می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\left(\frac{(y-۳x)}{۲} - \frac{۵۷}{۴}\right)e^{\frac{۲}{۳}(y-۳x)}\,e^{-(y-۲x)} + Ae^{-(y-۲x)} \\ &- ۴(y-۲x)(y-۳x) + \frac{۳}{۲}(y-۳x)^۲ + ۴(y-۳x) \\ &+ \frac{۲۱}{۸}(y-۲x)^۲ - \frac{۲۹}{۴}(y-۲x) + \frac{۵۷}{۴} - Ae^{-(y-۲x)}. \end{aligned}$$

نکته. اگر در معادله هذلولوی متغیر y زمان باشد، این متغیر را با t نشان می‌دهند و شرایط کشی را نیز شرایط اولیه می‌گویند.

تذکر. ۱) معادلات از نوع پوآسن که یک نوع معادله بیضوی است با روش دالامبر روی میدان بیکران قابل‌حل نیست. همچنین اگر توابع داده‌شده در اینگونه مسائل فاقد تبدیل فوریه نامتناهی باشند با اینگونه تبدیلات نیز قابل‌حل نیستند. با استفاده از توابع مختلط و نگاشت‌های همدیس می‌توان اینگونه مسائل را به مسائل روی میدان کراندار تبدیل و با استفاده از روش پایه آن‌ها را حل نمود.

۲) روش‌های دیگری برای حل مسائل روی میدان بیکران می‌توان یافت که استفاده نظری از آن‌ها بیشتر است اگرچه جنبه‌های محاسباتی نیز دارد. یکی از این روش‌ها اصل دوهامل است که در بخش بعدی می‌آید.

تمرین ۳.۲

مسائل زیر را با استفاده روش تبدیلات فوریه یا روش دالامبر حل کنید.

۱. $u_t = u_{xx} + u_{txx} - u + te^{-x}, \qquad t \geq 0 \; x \geq 0,$

$u(x,0) = 2e^{-x}, \quad u(0,t) = t.$

۲. $u_{tt} = u_{xx} + 2u_{txx} - u + e^{-x}\delta(t-1), \qquad t \geq 0,\ x \geq 0,$

$u(x,0) = U_1(x) - U_2(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = t,$

$U_a(t)$ تابع پله‌ای واحد با نقطه شروع a است.

۳. $u_{tt} + u_{xxxx} - u_{ttxx} + 2u_t = te^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0$

$u(x,0) = 2\delta(x - \frac{1}{2}), \quad u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}.$

۴. $u_{xx} + u_{yy} - u_{xxyy} - u = e^{-x-y}, \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$

$u(0,y) = e^{-y}, \quad u_y(x,0) = 1 - U_1(x).$

۵. $u_t = u_{xx} + u_{yy} - u_{txxyy} \qquad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ -\infty < y < \infty$

$-u + tx e^{-|y|},$

$u(x,y,0) = x\,U_0(y)\,e^{-y}, \quad u_x(0,y,t) = 0, \qquad u(1,y,t) = 0.$

مسائل با شرایط کشی زیر را برای $-\infty < x < \infty$ و $y > 0$ حل کنید.

۶. $\begin{cases} u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = x - y, \\ u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = x. \end{cases}$

۷. $\begin{cases} 3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} = 2x - 3y, \\ u(x,0) = x, \quad u_y(x,0) = e^x. \end{cases}$

۸. $\begin{cases} u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = xy, \\ u(x,0) = e^x, \quad u_y(x,0) = 1. \end{cases}$

مسائل با شرایط گورسای زیر را برای $-\infty < x < \infty$ و $-\infty < y < \infty$ حل کنید.

۹. $$\begin{cases} u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y = xy, & \\ u(x,y) = x^۲, & \text{روی } y = x \\ u(x,y) = -y^۲, & \text{روی } y = -x \end{cases}$$

۱۰. $$\begin{cases} ۴u_{xx} + ۵u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = ۲x + y, & \\ u(x,y) = x & \text{روی } y = x \\ u(x,y) = x^۲, & \text{روی } ۴y = x \end{cases}$$

۱۱. $$\begin{cases} u_{xx} + ۳u_{xy} + ۲u_{yy} + u_x + u_y = xy, & \\ u(x,y) = x - y, & \text{روی } y = x \\ u(x,y) = -۲x - ۲y, & \text{روی } y = ۳x \end{cases}$$

۴.۲ تبدیل لاپلاس و اصل دوهامل

تبدیل لاپلاس یکی از ابزارهای اصلی حل مسائل معادلات دیفرانسیل عادی با شرایط اولیه محسوب می‌گردد. از این ابزار برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای همراه با شرایط اولیه نیز می‌توان استفاده کرد. لیکن در اکثر مواقع محاسبه تبدیل معکوس بسیار پیچیده است. به‌این‌دلیل از آن کمتر استفاده می‌گردد. استفاده از آن برای معادلات موج یک بعدی ممکن است به جواب بسیار خوبی منجر شود. در اینجا مثال‌هایی از این مورد می‌آوریم.

مثال ۱۲.۲. مطلوبست حل مسئله با شرایط اولیه-مرزی موج یک بعدی زیر

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^{t-x}, & x \geq ۰, t \geq ۰ \\ u(x,۰) = e^{-x}, \quad u_t(x,۰) = ۰, \\ u(۰,t) - u_x(۰,t) = \sin t, & \lim_{x\to\infty} u(x,t) = ۰ \end{cases}$$

حل. از معادله تبدیل لاپلاس بگیرید.

$$\mathscr{L} u(x,t) = U(x,s) = U(x) = U$$

$$s^۲ U - U_{xx} = \frac{e^{-x}}{s-۱} + s e^{-x}, \qquad s > ۱, x \geq ۰$$

$$U(۰) - U'(۰) = \frac{۱}{s^۲+۱}, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = ۰$$

جواب عمومی معادله را به‌صورت زیر داریم.

$$s^۲ - r^۲ = ۰ \quad \Longrightarrow \quad r = \pm s$$

$$U(x) = C_۱ e^{-sx} + C_۲ e^{sx} - \frac{۱}{s^۲-۱}\left(\frac{۱}{s-۱} + s\right) e^{-x}$$

برای برقراری شرایط مرزی در بینهایت، با توجه به این‌که $s > ۰$، باید $C_۲ = ۰$. برای برقراری شرط مرزی در $x = ۰$ باید داشته باشیم:

$$U(۰) - U'(۰) = C_۱ - \frac{۱}{s^۲-۱}\left(\frac{۱}{s-۱} + s\right) - sC_۱ + \frac{۱}{s^۲-۱}\left(\frac{۱}{s-۱} + s\right)$$
$$= \frac{۱}{s^۲+۱}$$

یا

$$C_۱(۱-s) = \frac{۱}{s^۲+۱} \quad \Longrightarrow \quad C_۱ = -\frac{۱}{(s-۱)(s^۲+۱)}.$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.

$$U(x) = -\frac{۱}{(s^۲+۱)(s-۱)} e^{-sx} - \frac{۱}{s^۲+۱}\frac{۱}{s-۱} e^{-x} - \frac{s}{s^۲+۱} e^{-x}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{s}{s^۲+۱} + \frac{۱}{s^۲+۱} - \frac{۱}{s-۱}\right) e^{-sx} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{s}{s^۲+۱} + \frac{۱}{s^۲+۱} - \frac{۱}{s-۱}\right) e^{-x}$$
$$- \frac{s}{s^۲+۱} e^{-x}$$

با تبدیل معکوس‌گیری به‌دست می‌آوریم:

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\Big(\cos t + \sin t - e^{t}\Big)H(t-x) + \frac{۱}{۲}\Big(-\cos t + \sin t - e^{-t}\Big)e^{-x}.$$

که در این‌جا $H(t-x)$ تابع پله‌ای است که برای $x < t$ برابر صفر و برای $x > t$ برابر ۱ است.

مثال ۱۳.۲. مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t-x}, & x \geq ۰, t \geq ۰ \\ u(x,۰) = e^{-x}, \quad u(۰,t) = e^{-t}, & \lim_{x\to\infty} u(x,t) = ۰ \end{cases}$$

حل. بگیرید $\mathscr{L}u(x,t) = U(x,s) = U(x) = U$ و از مسئله تبدیل لاپلاس بگیرید.

$$\begin{aligned} &sU - U_{xx} = \frac{e^{-x}}{s+۱} + e^{-x} = \frac{s+۲}{s+۱}e^{-x}, \qquad s > ۱, x \geq ۰ \\ &U(۰) = \frac{۱}{s+۱}, \quad \lim_{x\to\infty} U(x) = ۰ \end{aligned}$$

جواب عمومی معادله را به‌صورت زیر داریم.

$$U(x) = C_۱ e^{-\sqrt{s}x} + C_۲ e^{\sqrt{s}x} + \frac{s+۲}{(s+۱)(s-۱)}e^{-x}$$

حال شرایط مرزی را اعمال کنیم:

$$\lim_{x\to\infty} U(x) = ۰ \quad \Longrightarrow \quad C_۲ = ۰$$

$$U(۰) = C_۱ + \frac{s+۲}{s^۲-۱} = \frac{۱}{s+۱}$$

یا

$$C_۱ = -\frac{s+۲}{s^۲-۱} + \frac{۱}{s+۱}.$$

به‌این‌ترتیب به‌دست می‌آوریم.

$$U(x,s) = \left(-\frac{s+۲}{s^۲-۱} + \frac{۱}{s+۱}\right)e^{-\sqrt{s}x} + \frac{s+۲}{s^۲-۱}e^{-x}.$$

چون

$$\mathscr{L}^{-۱}\left(e^{-\alpha\sqrt{s}}\right) = \frac{\alpha}{۲\sqrt{\pi t^۳}}e^{-\frac{\alpha^۲}{۴t}}$$

پس جواب نهائی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u(x,t) = \left(-\cosh t - ۲\sinh t + e^{-t}\right) * \frac{x}{۲\sqrt{\pi t^۳}} e^{-\frac{x^۲}{۴t}} + \left(\cosh t + ۲\sinh t\right) e^{-x}.$$

تذکر. استفاده از تبدیل لاپلاس برای معادله حرارت منجر به محاسبات پیچیده برای تبدیل معکوس می‌گردد. به‌این‌دلیل از آن برای مسائل معادلات حرارت کمتر استفاده می‌گردد.

در این قسمت به‌بیان اصل دوهامل روی میدان بیکران می‌پردازیم.

فرض کنید u تابعی مجهول و w تابعی معلوم از متغیرهای t، x، y و z و P یک عملگر دیفرانسیل پاره‌ای با ضرایب ثابت و از مرتبه m نسبت به t باشد. حال سه مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &P(u) = w(x,y,z,t), && t \geq ۰, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ &\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = f_j(x,y,z), && j = ۰,۱,۲,\cdots,m-۱ \\ &M_k u = h_k, && k = ۱,۲,\cdots,n \end{aligned} \tag{۱۱.۲}$$

که تساوی اخیر نشان دهنده شرایط مرزی غیر همگن با ضرایب ثابت است.

مسئله دوم را به‌صورت زیر داریم.

$$\begin{aligned} &P(u) = ۰, && t \geq ۰, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ &\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = f_j(x,y,z), && j = ۰,۱,۲,\cdots,m-۱ \\ &M_k u = h_k, && k = ۱,۲,\cdots,n \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

مسئله سوم را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &P(u) = ۰, && t \geq ۰, a < x < b, c < y < d, \alpha < z < \beta \\ &\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = ۰, && j = ۰,۱,۲,\cdots,m-۲ \\ &\frac{\partial^{m-۱} u}{\partial t^{m-۱}} = w(x,y,z,s) && \\ &M_k u = h_k, && k = ۱,۲,\cdots,n \end{aligned} \tag{۱۳.۲}$$

خاصیت ۳.۲. فرض کنید f_jها و h_kها و w توابعی پیوسته، $u_1(x,y,z,t)$ جواب مسئله (۱۲.۲) و $v(x,y,z,t;s)$ جواب مسئله (۱۳.۲) و $u_2(x,y,z,t) = \int_0^t v(x,y,z,t-s;s)\,ds$ باشد. آن‌گاه جواب مسئله (۱۱.۲) را به‌صورت زیر داریم:

$$u(x,y,z,t) = u_1(x,y,z,t) + u_2(x,y,z,t).$$

علت. چون معادله و کلیه شرایط تکمیلی خطی است و u_1 کلیه شرایط تکمیلی را برقرار می‌کند و $P(u_1) = 0$، کافیست نشان دهیم u_2 جواب مسئله زیر است.

$$\begin{cases} P(u) = w(x,y,z,t), & t \geq 0,\ a < x < b,\ c < y < d,\ \alpha < z < \beta \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, & j = 0,1,2,\cdots,m-1 \\ M_k u = 0, & k = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

ابتدا شرایط اولیه و مرزی را بررسی می‌کنیم. چون v دارای مشتق از مرتبه m پیوسته نسبت به t و مشتق‌پذیر نسبت به سایر متغیرها است پس جای حد و انتگرال قابل تعویض است. چون v در شرایط مرزی همگن صدق می‌کند پس u_2 نیز در شرایط مرزی همگن نیز صدق می‌کند. یعنی $M_k u_2 = 0$ برای $k = 1,2,\cdots,n$. حال شرایط اولیه را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف u_2 داریم $u_2(x,y,z,0) = 0$. همچنین

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x,y,z,0;t) + \int_0^t v_t(x,y,z,t-s;s)\,ds = \int_0^t v_t(x,y,z,t-s;s)\,ds$$

پس $u_{2_t}(x,y,z,0) = 0$. حال فرض کنید برای $j = 1,2,\cdots,i$ و $i < m-j$ داریم:

$$\left.\frac{\partial^i u_2}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \left.\int_0^t \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(x,y,z,t-s;s)\,ds\right|_{t=0} = 0.$$

در این‌صورت

$$\frac{\partial^{i+1} u_2}{\partial t^{i+1}} = \frac{\partial^i}{\partial t^i} v(x,y,z,0;t) + \int_0^t \frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} v(x,y,z,t-s;s)\,ds.$$

با توجه به فرض استقرا فوق به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\frac{\partial^{i+1} u_2}{\partial t^{i+1}}\right|_{t=0} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m-2.$$

برای $i = m-1$

$$\frac{\partial^i u_2}{\partial t^i} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v(x,y,z,0;t) + \int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} v(x,y,z,t-s;s)\,ds$$
$$= w(x,y,z,t) + \int_0^t \frac{\partial^m}{\partial t^m} v(x,y,z,t-s;s)\,ds.$$

بدین‌ترتیب:

$$P(u_2) = P\Big(\int_0^t v(x,y,z,t-s;s)\,ds\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial^i v}{\partial t^i}\Big|_{t=0} + \int_0^t P\big(v(x,y,z,t-s;s)\big)\,ds$$
$$= w(x,y,z,t).$$

پس u_2 در مسئله (۱۴.۲) صدق می‌کند.

مثال ۱۴.۲. مسئله موج ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t), & t \geq 0,\ -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

حل. برای $v(x,t;s)$ با توجه به مثال ۹.۲، حل دالامبر برای معادله موج همگن به‌دست می‌آوریم.

$$v(x,t;s) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(\tau,s)\,d\tau$$

در نتیجه

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau,s)\,d\tau ds.$$

همچنین از همان مثال برای u_1 داریم.

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x-ct) + f(x+ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

به‌این‌ترتیب جواب این مسئله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[f(x-ct) + f(x+ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\tau,s)\,d\tau ds.$$

در حالت خاص $h(x,t) = ۲xt^۲$ و $g(x) = xe^{-x^۲}$ و $f(x) = \sin x^۲$ به‌دست می‌آوریم.

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\Big[\sin(x+ct)^۲ + \sin(x-ct)^۲\Big] + \frac{۱}{۲c}\int_{x-ct}^{x+ct} xe^{-x^۲}\,dx$$
$$+ \int_{\circ}^{t}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} ۲\tau s^۲\,d\tau ds.$$

یا

$$u(x,t) = \frac{۱}{۲}\Big[\sin(x+ct)^۲ + \sin(x-ct)^۲\Big]$$
$$+ \frac{۱}{۴c}\Big[e^{-(x+ct)^۲} - e^{-(x+ct)^۲}\Big] + ۴cx\frac{t^۴}{۱۲}.$$

مثال ۲.۱۵. مسئله انتقال حرارت زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + tf(x), & t \geq \circ,\ -\infty < x < \infty \\ u(x,\circ) = g(x) \end{cases}$$

حل. جواب این مسئله را با استفاده از اصل دوهامل به‌صورت $u = u_۱ + u_۲$ داریم که $u_۱$ جواب مسئله همگن

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geq \circ,\ -\infty < x < \infty \\ u(x,\circ) = g(x) \end{cases}$$

و $u_۲(x,t) = \int_{\circ}^{t} v(x,t-s;s)\,ds$ که در آن $v(x,t;s)$ جواب مسئله زیر است.

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & t \geq \circ,\ -\infty < x < \infty \\ v(x,\circ) = sf(x) \end{cases}$$

حل مسئله $u_۱$ را با تبدیل فوریه به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} U_t + w^۲U = \circ, \\ U(\circ) = A = \mathscr{F}(g) \end{cases} \implies U = Ae^{-w^۲t}.$$

پس $U(w,t)=\mathscr{F}(g)e^{-w^{۲}t}$. طبق مثال ۴.۲ داریم:

$$\mathscr{F}^{-۱}\left(e^{-w^{۲}t}\right)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{x^{۲}}{۴t}}.$$

با توجه به خاصیت کنولوشن برای تبدیل فوریه که با فرمول زیر داده می‌شود:

$$\mathscr{F}^{-۱}\big(\mathscr{F}(g)\cdot\mathscr{F}(h)\big)=g*h=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)h(x-y)\,dy$$

به‌دست می‌آوریم:

$$u_{۱}(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{۴\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-\frac{(x-y)^{۲}}{۴t}}\,dy.$$

مشابهاً جواب مسئله v می‌شود.

$$v(x,t;s)=\frac{۱}{\sqrt{۴\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}sf(y)e^{-\frac{(x-y)^{۲}}{۴t}}\,dy.$$

و

$$u_{۲}(x,t)=\int_{\circ}^{t}\frac{۱}{\sqrt{۴\pi(t-s)}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}sf(y)e^{-\frac{(x-y)^{۲}}{۴(t-s)}}\,dy\right\}ds.$$

در نتیجه

$$u(x,t)=\frac{۱}{\sqrt{۴\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[g(y)\frac{e^{-\frac{(x-y)^{۲}}{۴t}}}{\sqrt{t}}+\int_{\circ}^{t}\frac{s}{\sqrt{t-s}}f(y)e^{-\frac{(x-y)^{۲}}{۴(t-s)}}\,ds\right]dy.$$

تذکر. اصل دوهامل هم برای میدان کرانه‌دار و هم برای میدان بیکران کاربرد دارد. در اینجا مثال‌ها برای میدان بیکران آورده شده است.

تمرین ۴.۲

مسائل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۱. $u_{tt}=u_{xx}+۳x\cos t,\qquad \circ\le x\le\pi,\ t\ge\circ$

$u(x,\circ)=x^{۲},\quad u_t(x,\circ)=\circ,\quad u(\circ,t)=t,\quad u(\pi,t)=\circ$

۲. $u_{tt} + ۲u_t = u_{xx} - u + xt, \qquad ۰ \leq x \leq \pi,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = ۰, \quad u(۰,t) = ۰, \quad u_x(\pi,t) = t$

۳. $u_{tt} = u_{xx} + u_{xxtt} + e^{-x}\sin t, \qquad x \geq ۰,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = e^{-x}, \quad u_t(x,۰) = ۰, \quad u_x(۰,t) = t, \quad u(+\infty,t) = ۰$

۴. $u_{tt} + u_{xxxx} = te^{-x}, \qquad ۰ \leq x < \infty,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = e^{-x}, \quad u_t(x,۰) = ۰,$

$u(۰,t) = t, \quad u_{xx}(۰,t) = ۰, \quad u(+\infty,t) = ۰$

۵. $u_t = u_{xx} + t^۲e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = e^{-x^۲},$ $u(x,t)$ کرانه‌دار

مسائل زیر را با استفاده از اصل دوهامل حل کنید.

۶. $u_{tt} + ۲u_t = u_{xxtt} + xt, \qquad ۰ \leq x \leq \pi,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_t(x,۰) = ۰, \quad u_x(۰,t) = t, \quad u(\pi,t) = ۰$

۷. $u_t = u_{xx} + u_{xxt} + xe^t, \qquad ۰ \leq x \leq ۱,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = x, \quad u_x(۰,t) = t, \quad u_x(۱,t) = ۰$

۸. $u_{tt} = u_{xx} + u + te^{-x}, \qquad ۰ < x < \infty,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = xe^{-x}, \quad u_t(x,۰) = ۰, \quad u_x(۰,t) = e^t, \quad u(+\infty,t) = ۰$

۹. $u_t = u_{xx} - u + \sin t\, e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = e^{-x^۲},$ $u(x,t)$ کرانه‌دار

۱۰. $u_{tt} + ۴u_{xxxx} + u_{xxtt} - u = e^{t-x}, \qquad x \geq ۰,\ t \geq ۰$

$u(x,۰) = e^{-۲x}, \quad u_t(x,۰) = ۰,$

$u_x(۰,t) = e^t, \quad u_{xxx}(۰,t) = t, \quad u(+\infty,t) = ۰, \quad u_{xx}(+\infty,t) = ۰$

مراجع

[۱] حصارکی، محمود، و فتوحی، مرتضی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، چاپ دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۹.

[2] Brown, James Ward, and Ruel Vance Churchill., *Fourier series and boundary value problems*, Vol. 6. New York: McGraw-Hill, 2001.